Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Auufgaben zur Vorlesung Mathematik II/1

1. Woche

Homogene und inhomogene Differentialgleichungssysteme

Ü2 Aufgabe 26.1. a

Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungssysteme:

a) $\dot{x} - 2x - 8y = 0, \quad \dot{y} - 3x + 8y = 0$

c) $\dot{x} - 2x = 0, \quad \dot{y} - 2x - y + 2z = 0, \quad \dot{z} + x - 2z = 0$

Kurzlösung:

a) Allgemeine Lösung des DGL-Systems

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-10t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1, \text{ bel.}$$

c) Allgemeine Lösung des DGL-Systems $\underline{y} = Y \cdot \underline{c}$ mit

$$Y = P_0 w_1 + P_1 w_2 + P_2 w_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,x} & 0 & 0 \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{2\,x} & \mathrm{e}^{x} & 2\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ -x\,\mathrm{e}^{2\,x} & 0 & \mathrm{e}^{2\,x} \end{pmatrix}$$

Also

$$\underline{y} = Y \cdot \underline{c} = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,x} \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ -x\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ \mathrm{e}^{2\,x} \end{pmatrix}$$

Es gibt auch die Lösung mit Eigenvektoren und Hauptvektor (t anstelle von x, die c_i etwas umgewählt):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \left\{ c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \right\} e^{2t} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^1, \text{ bel.}$$

Ü2 Aufgabe 26.2.

Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichungssysteme:

b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x + \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$

e) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Kurzlösung:

b) Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_{p,1}(t) + \mathbf{x}_{p,2}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t - 1 \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

Bemerkung: Da die Gleichungssysteme beim Koeffizientenvergleich unterbestimmt sind, können unterschiedliche Darstellungen der Lösung erhalten werden.

e) Allgemeine Lösung des DGL-Systems:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -3 + 8\,\mathrm{e}^{3t} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1, \text{ bel.}$$

Anfangsbedingung (AB): $\rightsquigarrow c_1 = -3, c_2 = 2.$