

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 7. Woche – Umlaufintegral und Flussintegral in EMF

1. Gegeben f_x, f_y Gesucht $f(x, y)$

Gegeben ist das Gradientenfeld $\text{grad } f(x, y) = (f_x, f_y)^T$. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen, [VL 9.30](#), erfüllt sind, und ermitteln Sie jeweils die zugehörige Funktion $f(x, y)$:

(a) $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x.$

(b) $f_x = 2x + y, f_y = x + 2y.$

2. Umlaufintegral

Geben Sie für das Beispiel [9.33](#) den Wert des Integrals an, wenn der Integrationsweg

$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 + \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0, 2\pi]$$

ist (Begründung).

3. Wohin zeigen eigentlich \underline{r}_u und \underline{r}_v ?

Sie haben in der VL gelernt, dass zur Berechnung von Flächenintegralen das Kreuzprodukt zweier Vektoren benötigt wird, nämlich von $\underline{r}_u = \frac{\partial}{\partial u} \underline{r}(u, v)$ und $\underline{r}_v = \frac{\partial}{\partial v} \underline{r}(u, v)$.

(a) Machen Sie sich zunächst anhand der Polarkoordinaten klar, dass \underline{r}_u und \underline{r}_v **tangential an Parameterlinien** sind.

Hier parametrisieren r, φ die Fläche, spielen also die Rolle von u, v .

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

i. Zeichnen Sie von einem beliebigen Punkt in der (x, y) -Ebene ausgehend z.B. von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{r}(r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}) \quad (*)$$

die sogenannte Parameterlinie $\underline{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi = \text{konstant}) \\ y(r, \varphi = \text{konstant}) \end{pmatrix}$.

Das ist die mit r parametrisierte Linie also die Kurve, entlang der r von dem gewählten Punkt aus zunimmt.

Zeichnen Sie analog $\underline{\gamma}(\varphi)$ mit $r = \text{konstant}$.

ii. Zeichnen Sie die Vektoren $\frac{\partial}{\partial r} \underline{r}(r, \varphi)$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(r, \varphi)$, an einen beliebigen Punkt in der (x, y) -Ebene z.B. an $(*)$ und vergleichen Sie diese Vektoren mit den Richtungen, in denen r bzw. φ (von diesem Punkt aus) zunimmt.

(b) Machen Sie sich anhand der Kugelkoordinaten klar,

i. was die Parameterlinien $\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{K}(r = \text{konstant}, \varphi, \theta = \text{konstant})$ und $\underline{\gamma}(\theta)$ sind,

- ii. in welcher Richtung φ bzw. θ zunehmen und
- iii. in welcher Richtung $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(\varphi, \theta)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{r}(\varphi, \theta)$ zeigen, vgl. [Bsp 9.36](#).

Übrigens sind die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial r} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$ und $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$, s. [8.28](#).

Merke: Sie können also zukünftig mit Hilfe der rechten Hand die Reihenfolge im Kreuzprodukt so planen, dass der Flächennormalenvektor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ in die gewünschte Richtung zeigt.

4. Flächenintegral 2. Art in EMF

Im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' lösen Sie Oberflächenintegrale 2. Art

$$I = \iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \iint \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

$d\underline{A} = \underline{n} dA$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der betrachteten Fläche steht. Dabei wird meist genutzt, dass die Flussgröße ($\underline{J}, \underline{B}$) senkrecht zur (sinnvoll gewählten) Fläche ist, z.B.:

$$\iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \stackrel{\underline{J} \parallel d\underline{A}}{=} \iint J dA \quad \text{mit } J = |\underline{J}| \text{ und } dA = |d\underline{A}|$$

Ermitteln Sie $d\underline{A}$ und dA für die Aufgaben [1.14](#), [1.15](#) und [3.19](#) aus dem EMF-Übungsheft nach den Regeln der Kunst ([VL 9.4](#)), indem Sie

- (a) die Fläche durch 2 (Lauf-)Parameter beschreiben $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$
- (b) per Kreuzprodukt aus den beiden zur Fläche tangentialen Vektoren den Vektor senkrecht zur Fläche ermitteln $d\underline{A} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v du dv$
- (c) sich überzeugen, dass dieses $d\underline{A}$ tatsächlich parallel zur Flussgröße ist und
- (d) den Betrag $dA = |d\underline{A}|$ betrachten, bis Sie 'sehen', dass er gleich den in EMF gebrauchten 'Abkürzungen' ist, nämlich für
 - i. Aufgabe 1.14: $dA = b dr$
 - ii. Aufgabe 1.15: $dA = 2\pi r dr$ bzw.
 - iii. Aufgabe 3.19: $dA = h dr$.

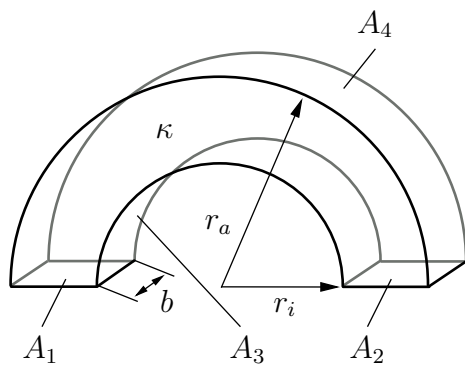


Bild zu 1.14

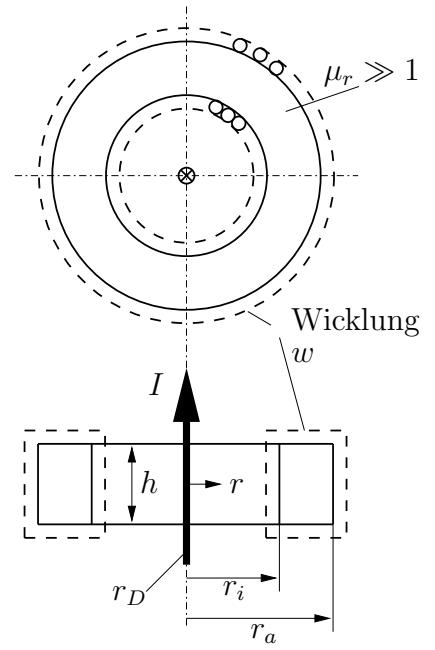


Bild zu 3.19