

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen) 6. Woche – Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\underline{\gamma}(t) = \underline{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $d\underline{s} = d\underline{x} = J_{\underline{\gamma}}(t) dt = \underline{\gamma}'(t) dt$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art (skalares Kurvenintegral, z.B. Bogenlänge)

$$ds = \|d\underline{x}\| = \|J_{\underline{\gamma}}(t)\| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Ermitteln Sie ds für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dabei sei $r(\varphi)$ eine gegebene Funktion.

- Geben Sie $\underline{\gamma}'(\varphi)$ an (Produktregel verwenden).
- Ermitteln Sie $\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|$.
- Geben Sie $ds = |d\underline{x}|$ an und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (ca. S. 129 bzw. 148).
- Verwenden Sie diese Formel zur Berechnung der Bogenlänge in Polarkoordinaten in der Aufgabe 2/22.2. :-)

Lösung:

(a)

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

(b)

$$\|\underline{\gamma}'(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

(c)

$$ds = |d\underline{x}| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$