Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

6. Woche – Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\underline{\gamma}(t) = \underline{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $\mathrm{d}\,\underline{s} = \mathrm{d}\,\underline{x} = J_\gamma(t)\,\mathrm{d}\,t = \underline{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}\,t$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art (skalares Kurvenintegral, z.B. Bogenlänge)

$$\mathrm{d}\,s = \|\,\mathrm{d}\,\underline{x}\| = \|J_\gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Ermitteln Sie $\mathrm{d}\,s$ für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dabei sei $r(\varphi)$ eine gegeben Funktion.

(a) Geben Sie $\underline{\gamma}'(\varphi)$ an (Produktregel verwenden).

(b) Ermitteln Sie $\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|$.

(c) Geben Sie $\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\underline{x}|$ an und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (ca. S. 129 bzw. 148).

(d) Verwenden Sie diese Formel zur Berechnung der Bogenlänge in Polarkoordinaten in der Aufgabe 2/22.2. :-)