

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante

1. Kugelkoordinaten - warm up

- (a) Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten (VL 8.28) mit $r = \text{konstant}$ beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel φ und θ (in der VL ψ) durchlaufen.
- (b) Welche Flächen werden durch $\varphi = \text{konstant}$ (r, θ beliebig) bzw. $\theta = \text{konstant}$ (r, φ beliebig) beschrieben?

2. Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

- (a) Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im \mathbb{R}^3 die Richtungen vor, in denen r bzw. φ bzw. θ zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$ (s. VL 8.28) - sind diese orthogonal zueinander?
- (b) Rekapitulieren Sie die Determinante einer 3×3 -Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?
- (c) Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. VL 8.29.

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?