

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

3. Woche – Stetigkeit, partielle Ableitungen und 'Wann gilt Satz von Schwarz?'

1. Stetig in $(x, y) = (0, 0)$?

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$u = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$v = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ ?, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(0, 0)$, indem Sie

- Polarkoordinaten nutzen: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und
- den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ betrachten und
- evtl. den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ für $\varphi = 0$ sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ betrachten.

2. fröhliches Ableiten

Überzeugen Sie sich, dass für u aus Aufgabe 1

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = v \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

gilt (Satz von Schwarz).

3. fröhliches Ableiten \Rightarrow Huch?! (weiter mit u aus Aufgabe 1)

- Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} u$ für $x = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial x} u(0, y) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u(0, y)$.
- Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y} u$ für $y = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0)$.
- Geben Sie ((a) und (b) nutzend) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u(0, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(0, 0)$ an. Warum gilt hier der Satz von Schwarz nicht?