

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

1. Woche – Eigenwerte / Eigenvektoren / Kegelschnitt

1. **Cramersche Regel** Mitunter (z.B. in ET1) wird die [Cramersche Regel](#), [Wiki](#) zur Lösung eines (kleinen) linearen Gleichungssystems verwendet. Dabei wird eine der Unbekannten als Quotient zweier Determinanten berechnet.

Wir wollen die Cramersche Regel verstehen und betrachten das Beispiel:

$$A\underline{x} = (\underline{a} \quad \underline{b} \quad \underline{c}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c} \stackrel{(*)}{=} \underline{d}, \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$$

- (a) Warum ist die Determinante folgender Matrizen gleich Null?

$$\det(\underline{b} \quad \underline{b} \quad \underline{c}) = 0 \quad \text{und} \quad \det(\underline{c} \quad \underline{b} \quad \underline{c}) = 0$$

- (b) Nutzen Sie die Linearität der Determinante

$$\det(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \quad \dots) = \alpha \det(\underline{a} \quad \dots) + \beta \det(\underline{b} \quad \dots)$$

um folgende Determinante durch Verwendung von (*) in die Summe von 3 Determinanten umzuwandeln:

$$\det(\underline{d} \quad \underline{b} \quad \underline{c}) = \dots + \dots + \dots \quad (**)$$

- (c) Stellen Sie (**) unter Verwendung von (a) nach x_1 um.

Das ist die Cramersche Regel zur Berechnung einer Unbekannten (hier x_1) im linearen Gleichungssystem. Zur Berechnung von x_i muss die 'rechte Seite' (hier \underline{d}) anstelle der i -ten Spalte in die Koeffizientenmatrix eingesetzt werden.

2. **Weltformel für diagonalisierbare Matrizen:** $A = S\Lambda S^{-1}$

Betrachtet wird die lineare Abbildung $\underline{y} = A\underline{x}$. Gegeben sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Matrix A . Bitte alles Folgende auch skizzieren!

- (a) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{v}^1$ des Vektors \underline{v}^1 an.

- (b) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{x}$ des Vektors $\underline{x} = 1 \cdot \underline{v}^1 + 3 \cdot \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ an.

- (c) Geben Sie die Matrix A an.

3. LGS - EW/EV - für fortgeschrittene Studenten

Schreiben Sie die Gleichung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$ (*) als lineares Gleichungssystem in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (**)$$

Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt = 0 ?), dass (*) und damit auch (**) die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (***)$$

hat. Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (***) über den Rang der Koeffizientenmatrix \underline{M} (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?

Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (***) über mindestens einen Eigenwert von \underline{M} ? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!

4. Kegelschnitt Hyperbel

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ (1) wird Hyperbel genannt.

Bei Kegelschnitten wird jedoch bei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) von einer Hyperbel gesprochen. Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

- Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!
- Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für x' und y' ein.
- Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix S als Spalten eingetragen:
 $\underline{x}_{\text{alt}} = S \cdot \underline{x}_{\text{neu}}$ (3) (analog $\underline{x} = S\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = S^T\underline{x}$, wenn S orthogonal, s. [7.51 VL](#)).
- Es gilt $\underline{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\underline{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Geben Sie mit Hilfe von (3) x und y als Funktion von x' und y' an.
- Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Geben Sie a und b an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

5. Kegelschnitt grafisch

Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:

$x^2 - y^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 1$, $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$, $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$
(Asymptote mit zeichnen)

6. Orthogonale Matrix

Geben Sie für die Matrix $\underline{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse \underline{Q}^{-1} , ihre Transponierte \underline{Q}^T sowie $\underline{Q}^T \cdot \underline{Q}$ an. Ist \underline{Q} eine orthogonale Matrix, d.h. bilden ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis (ONB)?

Zusatz: Kompl. EW - Drehung

Betrachtet wird die Abbildung $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Geben Sie das Bild des Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).
- Berechnen Sie nun die Eigenwerte der Matrix A .
- Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).
- Schreiben Sie A als Element von $C = \{aE + bI : a, b \in \mathbb{R}\}$ s. [7.12 VL](#).

Wie hängen a und b mit den Eigenwerten zusammen und wie lautet die zu A gehörige komplexe Zahl z ?