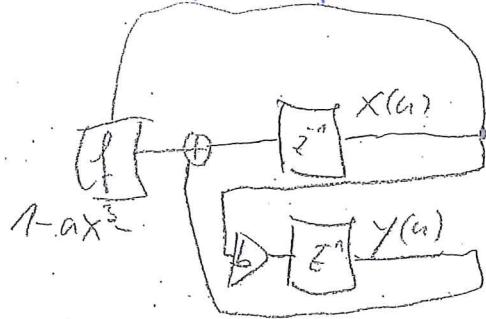


## Lösung: Aufgabe 1

Hewson

$$x^2 + 5x + 6, x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2}$$



$$Y_{FP} = bX_{FP} \quad X_{FP} = bX_{FP} + 1 - aX_{FP}^2, \quad a = 1/4, \quad b = 0.3$$

$$x_{FP}^2 + \frac{1-b}{a} x_{FP} - \frac{1}{a} = 0 \quad ; \quad x_{FP} = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}$$

$$Df = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad Df(x_{fp}) = \begin{pmatrix} +2 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \det(2E - A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= x(2 \oplus z) - b = x^2 \oplus xz - b$$

$$x_{1,2} = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 + 4b}}{2} \quad FP : x_{1,2} \approx +1.9 / 0.15x + 1$$

beide: nicht orientierter Sitz

2. Hénon-Abbildung (s. 3.2) mit  $a = 1,4$  und  $b = 0,3$ .

(a)

$$(b) \text{ Fixpunkte: } (3.1) \rightarrow x_{FP1,2} = \frac{b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}$$

(c)

$$Df = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

(d)  $FP_+ : \lambda_{1/2} \approx 1,9 / -0,15$ ,  $FP_- : \lambda_{1/2} \approx -3,2 / 0,09 \rightarrow$  Beide Fixpunkte sind instabil, da ein Eigenwert der Jacobi-matrix im Fixpunkt außerhalb des Einheitskreises liegt.

(e) Beide Fixpunkte sind nichtorientierte Sattel (flipping saddle).

### 3 Zeitdiskretes System mit Periode-2-Orbit

(a)

$$Df = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 1 & 2(y-0,5) \end{bmatrix}$$

**Bemerkung 6.4** • Viele NW-Kriterien (zur asympt. Stab. von AP oder zu Eind. asympt. Verh.) benutzen genau diese Lyapunov-Funktion und basteln die ndf. von  $v$  mit Strukturkriterien (wie 'keine Masche/Schnitt ohne Widerstand') unter Verwendung des Theorems der gefärbten Bögen (Colored Branch Theorem, CBT). Allerdings lassen diese Kriterien nur positive Widerstände zu.

- Allerdings können AP trotz (lokal) negativer Wid. asympt. stabil sein. Diese NW-Kriterien sind eben wie Lyapunovs 2. Methode sehr konservativ.
- Immer, wenn ein lineares System (z.B. eines mit negativen Widerständen) nur Eigenwerte mit  $\Re(EW) < 0$  hat existiert eine Lyapunov-Funktion mit der quadratischen Form  $v = z'Mz$ , M - pdf. Nur sieht sie sonstwie aus. [Äquipotentiallinien = Ellipsen, Hauptachsen  $\neq u_C, i_L$ -Achsen]

$$V = x^2 + y^2$$

$$V = \frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2}$$

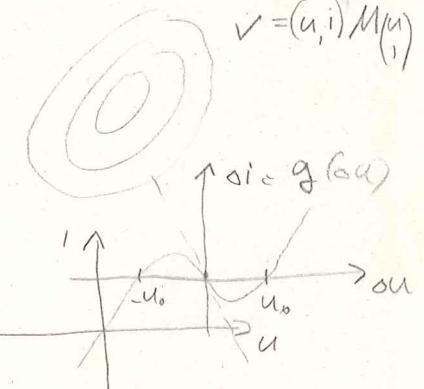


Bild: E-niveaus: Kreise, 'gerade' Ellipsen, 'schräge' Ellipsen

→ Beispiel: 'mittlerer' FP des Tunnel-Oszillators:

Lösung: Aufgabe 2



Bild: nichtlineares Differenznetzwerk: R-L-kubisch  $R \parallel C$

Annahme: Tunnel-Diode hat kubische Kennlinie bzgl. des AP:

$$\Delta i(\Delta u) = g\Delta u(\Delta u - u_0)(\Delta u + u_0), g > 0$$

Mit

$$v = \frac{C\Delta u_C^2}{2} + \frac{L\Delta i_L^2}{2}$$

folgt

$$\dot{v} = C\Delta u_C \cdot \frac{\Delta u_C}{dt} + L\Delta i_L \cdot \frac{\Delta i_L}{dt} \quad (6.5)$$

$$= \Delta u_c \Delta i_c + \Delta u_L \Delta i_L \quad (6.6)$$

$$= \underline{\Delta u_c (\Delta i_L - \underline{\Delta i(\Delta u_C)})} + (-R\Delta i_L - \underline{\Delta u_c}) \Delta i_L \quad (6.7)$$

$$= -g\Delta u^2(\Delta u - u_0)(\Delta u + u_0) - R\Delta i_L^2 \quad (6.8)$$

1. Term nicht ndf. → keine Aussage

[ist bei lokal negativem Wid. und DER Lyapunov-Funktion auch nicht zu erwarten]

[Wäre der Wid. im FP lokal passiv/positiv, wäre ndf. gesichert.]

$R: u_{11} - KL = 2+4$  Quadrat

$\rightarrow$  polp!

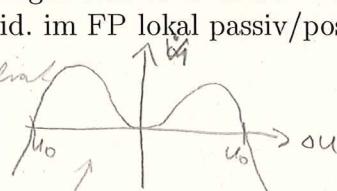
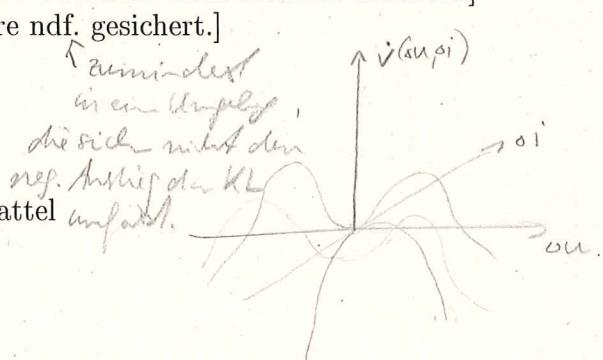


Bild: Kennlinie 1. Term (Poly. 4. Grades),  $v$ -Sattel



Würde wäre in  $u(0) \neq 0$

S. Müller / DGL / Kollera / vold  
Kernel 1.6  
get id 1/d<sub>2</sub>  
 $i = g(\varphi) = \alpha \varphi^3$

Beispiel 2: Netzwerk

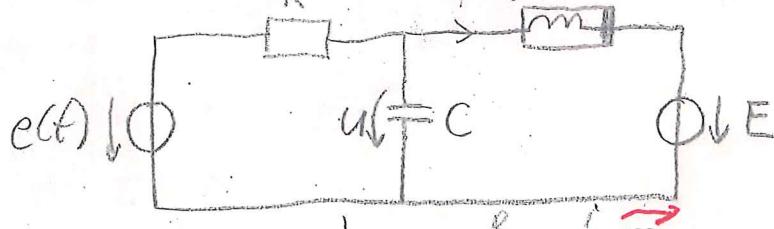
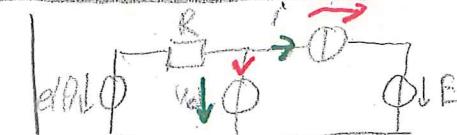


Bild:  $e(t) - R - C\parallel(L - E)$ ,  $i = g(\varphi) = \alpha\varphi^3$   
0. Zustände:  $u$  und  $\varphi$ ;  $u$  - Ausgang



1. Zustandsgleichungen aufstellen (evtl. mit assoziiertem resistiven Netzwerk:  $C \rightarrow U, \dots$ )

$$\begin{aligned} Cu &= \frac{e - u}{R} - g(\varphi) & \text{Simulation mit } C=1, R=1, E=1, w=1 \\ \dot{\varphi} &= u - E & \alpha=1 \end{aligned} \quad (9.37)$$

2. Arbeitspunkt(e!) für  $e \equiv 0$  bestimmen (entweder an der DGL oder am DC-OP-Netzwerk)  
 $\rightarrow u_0 = E, i_0 = -E/R, \varphi_0 = g^{-1}(i_0) = (-E/(\alpha R)^{1/3})^{1/2}$

$$i_0 = g(\varphi_0) = \alpha \varphi_0^3$$

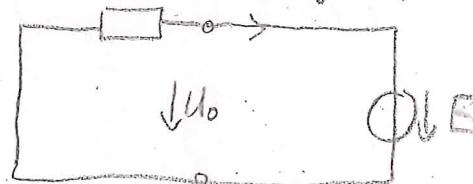


Bild: DC-OP-Netzwerk  $e, L \rightarrow |, C \rightarrow |$

3. Differenz-Zustandsgleichungen -  $DGL(x_0 + \Delta x, e) - DGL(x_0, 0)$  (evtl. aus nichtlinearer Differenzgleichung Kleinsignalersatzschaltung - Ursprung in den AP schieben)  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \Delta x &= X - X_0 & -\alpha(\varphi) \\ C\Delta u &= \frac{e - \Delta u}{R} - g(\varphi_0 + \Delta\varphi) + g(\varphi_0) \\ (\Delta u)_0 - C\bar{u}_0 &= \frac{e - \Delta u}{R} - \underbrace{\alpha(3\varphi_0^2\Delta\varphi + 3\varphi_0\Delta\varphi^2 + \Delta\varphi^3)}_{\Delta i = g(\varphi_0 + \Delta\varphi) - i_0} & g(\varphi_0) \\ \Delta\varphi &= \Delta u & \end{aligned} \quad (9.38)$$

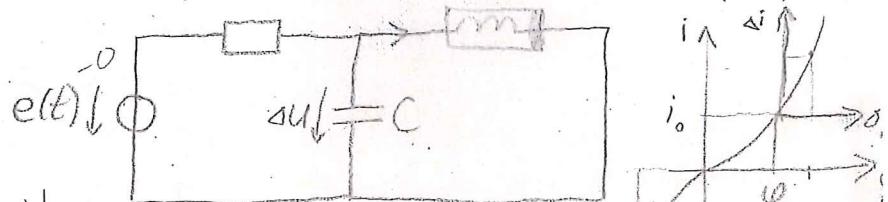


Bild: Differenz-Netzwerk  $E \rightarrow |$

4. DGLn  $\rightsquigarrow$  Äquivalenz der Systeme

Bezeichnung

$$1. DGL \quad e \xrightarrow{[EH_n]} \Delta u \xrightarrow{S} \Delta i \equiv (*)$$

$$2. DGL \quad e \xrightarrow{[EH_n^f]} \Delta\varphi \xrightarrow{H_1} \Delta u \xrightarrow{S} \Delta i \equiv e \xrightarrow{[EH_n]} \Delta u$$

Bild: Blockdiagramme äquivalenter Systeme

$$f(x) = \underbrace{3\varphi_0^2}_{H_1^f} x + \underbrace{3\varphi_0 x^2}_{H_2^f} + \underbrace{x^3}_{H_3^f}$$

$$\begin{aligned} \Delta i &= g(\varphi_0 + \Delta\varphi) - i_0 \\ &= \alpha(\varphi_0 + \Delta\varphi)^3 - \alpha\varphi_0^3 \\ &= \alpha(3\varphi_0^2\Delta\varphi + 3\varphi_0\Delta\varphi^2 + \Delta\varphi^3) \end{aligned}$$

54

