Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
13. Woche – Residuum

A1 Herleitung Residuenberechnung

Betrachtet wird das Integral

$$I = \oint_C g(z)dz$$

wobei $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}$ und $f(z)$ eine um z_0 holomorphe Funktion ist und der Integrationsweg C z_0 einmal umläuft.

Da die Funktion $f(z)$ um z_0 holomorph ist, lässt sie sich als komplexe Potenzreihe (VL 13.65) darstellen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

(a) Schreiben Sie die ersten 3 Summanden der Potenzreihe von $f(z)$ sowie der Laurent-Reihe von $g(z)\ \sum_{k=?}^{\infty} = a_k(z-z_0)^k$ aus.

(b) Welcher Koeffizient ist das Resiuduum (Def. 13.71) von $g(z)$?

(c) Führen Sie mit $g(z)$ = die ersten 3 Summanden ... ein paar Rechenschritte durch, bis a_{-1} = erhalten. Sie dürfen sich an Zusatz in AB6 erinnern ;-) und
- $g(z)$ mit geeigneten Potenzen von $(z-z_0)$ multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten,
- ggf. durch einen geeigneten Ausdruck teilen und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

(d) Überlegen Sie sich, wie Sie bei $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ vorgehen würden?

(e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Satz 13.75.

Kurzlösung:

(a) $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$
$g(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \frac{c_1}{(z-z_0)^2} + \frac{c_2}{(z-z_0)} + \dots$.

(b) $a_{-1} = c_2$

(c) ;-)

$$g(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \frac{c_1}{(z-z_0)^2} + \frac{c_2}{(z-z_0)} + \dots \quad | \cdot (z-z_0)^3 \tag{0.1}$$

$$g(z)\cdot(z-z_0)^3 = \dots \quad |\frac{\mathrm{d}\,.}{\mathrm{d}\,z} \tag{0.2}$$

$$\dots = \dots \quad | \cdot \frac{1}{2!} \tag{0.3}$$

$$\dots = c_2 = a_{-1} \tag{0.4}$$