

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 13. Woche – Residuum

A1 Herleitung Residuenberechnung

Betrachtet wird das Integral

$$I = \oint_C g(z) dz$$

wobei $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}$ und $f(z)$ eine um z_0 holomorphe Funktion ist und der Integrationsweg C z_0 einmal umläuft.

Da die Funktion $f(z)$ um z_0 holomorph ist, lässt sie sich als komplexe Potenzreihe (VL 13.65) darstellen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

- Schreiben Sie die ersten 3 Summanden der Potenzreihe von $f(z)$ sowie der Laurent-Reihe von $g(z) \sum_{k=?}^{\infty} = a_k (z - z_0)^k$ aus.
- Welcher Koeffizient ist das **Residuum** (Def. 13.71) von $g(z)$?
- Führen Sie mit $g(z) =$ die ersten 3 Summanden... ein paar Rechenschritte durch, bis $a_{-1} =$ erhalten. Sie dürfen sich an **Zusatz in AB6** erinnern ;-) und
 - $g(z)$ mit geeigneten Potenzen von $(z - z_0)$ multiplizieren,
 - ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten,
 - ggf. durch einen geeigneten Ausdruck teilen und
 - einen geeigneten Wert für z einsetzen.
- Überlegen Sie sich, wie Sie bei $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ vorgehen würden?
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit **Satz 13.75**.