Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
6. Woche – Laplace-Transformation, Partialbruchzerlegung

Laplace-Transformation

7.VI.3 **a,c** s. Übungsheft Funktionentheorie, S. 33
Kurzlösung:

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ t-a, & a \le t \le b \\ (b-a), & t > b \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2}(\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs})$

c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = A\dfrac{1}{s} - 2A\dfrac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-as} + A\dfrac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-2as}$,

A1 Ermitteln Sie die Lösung der folgenden DGL mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\dot{x}(t) + 5x(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0.$$

Gehen Sie dabei analog VL Bsp. 13.11 vor:

(a) Geben Sie die Laplace-Transformierte der DGL an.
(b) Lösung Sie (a) nach $X(s)$ auf.
(c) Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von (b) und
(d) Rücktransformieren Sie (c).

Kurzlösung:

(a) $sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s}$
(d) $X(t) = \frac{1}{5}\,(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t)\,\mathrm{e}^{-5t})$.

A2 Überprüfen Sie den Faltungssatz, VL Satz 13.12 für die in der Tabelle gegebenen Signale $f(t), g(t)$, indem Sie

i Faltung $(f * g)(t)$ berechnen,
ii die Laplace-Transformierten der drei Signale $f(t), g(t)$ und $(f * g)(t)$ ermitteln (ggf. Tabellen nutzen) und

iii überprüfen, ob das Produkt der ersten beiden Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$ gleich der dritten $\mathcal{L}(f * g)(s)$ ist.

	$f(t)$	$g(t)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$

Hinweise: Für (c,d) ist $g(t)$ ein beliebiges Signal mit $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s)$.
$\delta(t)$ ist der Dirac-Impuls.

Merke: Faltung im Zeitbereich $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Produkt im Bildbereich.

Kurzlösung:

	$f(t)$	$g(t)$	$(f * g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$\mathcal{L}(g)(s)$	$\mathcal{L}(f * g)(s)$	$\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f * g)(s)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	✓
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	✓
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$	$\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}$	$G(s)$	$\dots,\ (*)$	✓
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$	$g(t)$	1	$G(s)$	$G(s)$	✓

(*) Ableitungsregel 'rückwärts' = Integrationsregel.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

A3 PBZ für einfache Pole

Man zerlege $f(z)$ in Partialbrüche.

$$f(z) = \frac{(3-i)z-5}{(z+i)(z-2)}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert, den Sie erhalten, wenn Sie einen Pol von $f(z)$ streichen und in den 'Rest' die Polstelle einsetzen.

Kurzlösung:

$$f(z) = \frac{3}{z+i} - \frac{i}{z-2}.$$

Zusatz: A ist das später so gefragte **Residuum**
Die Funktion $f(z)$ soll in Partialbrüche zerlegt werden.

(a)
$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \ldots$$

(b)
$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})^2(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \frac{B}{(z - z_{\text{Pol}})^2} + \ldots$$

Geben Sie für (a) und (b) ein Verfahren (eine allgemeine Formel) zur Berechnung von A an. Sie dürfen

- $f(z)$ mit geeigneten Termen multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

Kurzlösung:

(a) $\quad A = f(z)(z - z_{\text{Pol}})\big|_{z=z_{\text{Pol}}}$,

(b) $\quad A = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} f(z)(z - z_{\text{Pol}})^2\right|_{z=z_{\text{Pol}}}$.

A ist das später so gefragte Residuum.

Kurven in der komplexen Ebene

A4 Ortskurven

In der VL Dynamische Netzwerke lernen Sie Ortskurven kennen - das sind Kurven, die Orte in der komplexen Ebene verbinden, die von einer reellen Variablen, z.B. von $t \in \mathbb{R}$ in der Geradengleichung $z = z_0 + tz_1$ abhängen.

(a) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = z_0 + tz_1$ für zwei selbst gewählte komplexe Zahlen z_0, z_1 für $t \geq 0$.

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + \mathrm{i}\omega L$ für (konstante) reelle $R, L > 0$ mit (variablem) $\omega \geq 0$.

(c) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + \mathrm{i}\omega L$ für (konstante) reelle $\omega, L > 0$ mit (variablem) $R \geq 0$.

Kurzlösung:

(a) 'schräge' Halbgerade von z_0 in Richtung z_1.

(b) 'senkrechte' Halbgerade.

(c) 'waagerechte' Halbgerade.

7.1.24 a) α, β**, Zusatz:** γ, δ s. Übungsheft Funktionentheorie, S. 5
Kurzlösung:

(a) a) positive imaginäre Achse;
b) negative imaginäre Achse;
c) $x = 1 \quad \longrightarrow \quad z = 1 + it \quad \longrightarrow \quad w = (1+it)^2 = 1 - t^2 + i2t = u + iv$ mit $u = 1 - t^2$, $v = 2t$.
Folglich ist $t^2 = 1 - u = \frac{v^2}{4}$, also $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ Parabel;
d) $y = -1 \quad \longrightarrow \quad z = t - i \quad \longrightarrow \quad w = (t-i)^2 = t^2 - 1 - i2t = u + iv$ mit $u = t^2 - 1$, $v = -2t$.
Folglich ist $t^2 = u + 1 = \frac{v^2}{4}$, also $u = \frac{v^2}{4} - 1$ Parabel;