Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

# Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
## 4. Woche – Fourier-Reihen, Spektrum und Parseval

### Fourier-Reihen Periode $2\pi$

**A1** $c_k \sim \frac{1}{k^?}$

Sie kennen aus Übung2, A6 bereits die Fourier-Reihe der $2\pi$-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \end{aligned}$$

und aus Übung3, A5 die Fourier-Reihe der $2\pi$-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \le \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die $2\pi$-periodische Dreiecks- und Rechteck-Funktion. Welche der beiden Funktionen ist stetig?

(b) Betrachten Sie die Proportionalität der Fourier-Koeffizienten beider Reihen bzgl. $k$ und vergleichen Sie mit der Faustregel s. Ma3, nach Bsp. 12.23 .

**Kurzlösung:**

(a) Dreieck stetig, Rechteck nicht stetig.

(b) Rechteck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k} \rightsquigarrow$ unstetig ; Dreieck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow$ stetig. Faustregel bestätigt.

**A2** $a_k, b_k \rightsquigarrow$ **stetig oder nicht**

Betrachtet wird die folgende Fourier-Reihe einer reellen Funktion $f(x)$

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{4}{k^2}\cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k}\sin(kx)\right).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass die reellen Fourier-Koeffizient $a_k$ bzw. $b_k$ den geraden bzw. den ungeraden Anteil der rellen Funktion $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ widerspiegeln.

(b) Identifizieren Sie in obiger Reihe die $a_k$ bzw. $b_k$. Betrachten Sie deren Verhalten für $k \to \infty$ und machen Sie mit Hilfe der Faustregel aus Ma3, nach Bsp. 12.23 eine Aussage darüber, ob der gerade oder ungerade Anteil eine stetige Funktion ist.

## A3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Geradheit/Ungeradheit

Betrachtet wird folgende Funktion: $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

(a) Setzen Sie die Funktion direkt zu einer $2\pi$-periodischen Funktion $F(x)$ fort und skizzieren Sie die Funktionskurve von $F(x)$. Stellen Sie fest, welche der Eigenschaften Stetigkeit, Differenzierbarkeit (jeweils stückweise oder auf ganz $\mathbb{R}$) bzw. Geradheit/Ungeradheit die Funktion $F(x)$ besitzt.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $F(x)$ und stellen Sie die Fourierreihe auf.

**Kurzlösung:**

(a) $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

<u>direkte period. Fortsetzung:</u>

$$F(x) = f(x - 2\pi n) = (x - 2\pi n)^2, 2n\pi < x < 2(n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion $F(x)$ ist stückweise stetig und stückweise glatt, aber weder gerade noch ungerade.

<u>Fourierkoeffizienten:</u> Aus Periodizitätsgründen ( $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+2\pi)}$) läßt sich das Integrationsintervall bei der Berechnung der Koeffizienten von $[-\pi, \pi]$ auf $[0, 2\pi]$ verschieben.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[ \tfrac{2x}{k^2} \cos(kx) + (\tfrac{x^2}{k} - \tfrac{2}{k^3}) \sin(kx) \Big]_0^{2\pi} = \frac{4}{k^2}.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin(kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[ \tfrac{2x}{k^2} \sin(kx) - (\tfrac{x^2}{k} - \tfrac{2}{k^3}) \cos(kx) \Big]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{k}.$$

Folglich ist die Fourierreihe:

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( \tfrac{4}{k^2} \cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k} \sin(kx) \Big).$$

**Fourier-Reihen Periode $T$**

**16.2 n) Kleinste Periode**

Geben Sie die (kleinste) Periode T des folgenden Signals an:
$f(x) = x\cos(2x)$ für $|x| < 2\pi$ und $f(x + 4n\pi) = f(x)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

**Kurzlösung:** $T = 4\pi$.

**Ü1 Aufgabe 16.4.**

Die folgenden Funktionen $f$, die in jeweils einem Intervall (Länge $T$) angegeben werden, sind mit der Periode $T$ periodisch fortzusetzen und in (komplexe) Fourierreihen

$f(x) = \sum c_k \exp\{(2\pi \mathrm{i}k/T)x\}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zu entwickeln:

g) $x = t$, $f(t) = 0$ für $-T + \tau/2 < t < -\tau/2$, $f(t) = A$ für $|t| < \tau/2$ ($f(t)$ : Rechteckimpulsfolge, $\tau/T$ : Tastverhältnis). Man skizziere $f(t)$ und $|c_k|$. Welche Eigenschaft von $f$ garantiert das Reellsein von $c_k$ ?

**Kurzlösung:**

(g)

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p} \int\limits_{-p/2}^{p/2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\mathrm{d}t = A \cdot \frac{\tau}{T}$$

Für die restlichen Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe ergibt sich

$$c_k \;=\; \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\mathrm{d}t = -\frac{A}{2\pi i k} \underbrace{\left(\mathrm{e}^{-ik\pi\frac{\tau}{T}} - \mathrm{e}^{ik\pi\frac{\tau}{T}}\right)}_{-2i\sin(k\pi\frac{\tau}{T})} = A\frac{\sin(k\pi\frac{\tau}{T})}{k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\,.$$

Die Koeffizienten $c_k$ sind rein reell, da die Funktion $f(t)$ gerade ist. Damit lautet die Fourier-Reihe $S(t)$ zur Funktion $f(t)$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = A\frac{\tau}{T} + A \cdot \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\frac{\tau}{T})}{k\pi} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}kt}$$

**A4 Gegeben: Signal, gesucht: Periodendauer bzw. Grundfrequenz**

Bestimmen Sie die Periode $T$ und die Fourierkoeffizienten $a_k, b_k$ $k \in \mathbb{N}$ der Funktion

$$u(t) = u_a \cos(2\pi f_a t) + u_b \cos(2\pi f_b t)$$

für die Fälle

(a) $f_b = 2 f_a$ (b) $f_b = \frac{3}{2} f_a$.

(Hinweis: Der Weg über die Berechnung der $a_k, b_k$ mittels der Integralformel ist nicht der kürzeste. Die reelle Fourierreihe steht schon da!)

**Kurzlösung:**

Bestimmen eine Grundfrequenz $f_0$, von der die im Signal enthaltenen Frequenzen **ganze** Vielfache sind. (Die Periodendauer ist dann $T = \frac{1}{f_0}$.)
(a) $f_0 = f_a$ also $a_1 = u_a, a_2 = u_b, a_k = 0$ für $k \neq 1, 2$ und $b_k = 0$ für alle $k$.

**A5 Zusammenhang $a_k, b_k, c_k$ und 'komplexer Zeiger'**

Geben Sie für das folgende Signal die Koeffizienten der reellen UND der komplexen Fourierreihe sowie den in der VL Dynamische Netzwerke genutzten 'komplexen (Effektivwert-)Zeiger' $\underline{U}$ an:

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{T}$$

**Kurzlösung:**

Per Additionstheorem steht die reelle Fourier'reihe' praktisch da. Und die reellen Fourierkoeffizienten sind ablesbar. Koeffizienten nicht-vorhandener Summanden sind Null.

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \underbrace{\hat{U} \cos\varphi}_{a_1} \cos(2\pi f_0 t) \underbrace{-\hat{U} \sin\varphi}_{b_1} \sin(2\pi f_0 t)$$

Komplexe Fourier'reihe':

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2\,\mathrm{Re}\{\frac{\hat{U}}{2} e^{i(2\pi f_0 t + \varphi)}\} = 2\,\mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{\hat{U} e^{i\varphi}}{2}}_{c_1} e^{i 2\pi f_0 t}\}$$

Also ist

$$c_1 = \frac{\hat{U} e^{i\varphi}}{2} = \frac{\hat{U}(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{2} = \frac{a_1}{2} - i \frac{b_1}{2}$$

'komplexer (Effektivwert-)Zeiger':

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{\hat{U}e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}}_{\underline{U}} e^{i2\pi f_0 t}\}$$

also:

$$\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}e^{i\varphi} = \sqrt{2}c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} - i\frac{b_1}{\sqrt{2}}$$

**Merke:** Bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ entspricht der 'komplexe (Effektivwert-)Zeiger)' $c_1$.

## Spektrum und Parseval

### A6 Spektrum $c_k$: k-Achse = Frequenz-Achse

(a) Machen Sie sich klar, dass jeder Fourier-Koeffizient $c_k$ bzw. $X_k$ einer bestimmten Frequenz zugeordnet ist. $|c_k|$ bzw. $|X_k|$ entsprechen der (halben) Amplitude einer im Signal (als Summand) enthaltenen harmonischen Schwingung welcher Frequenz?

(b) Machen Sie sich klar, dass die '$k$-Achse' des **Spektrums** ($|c_k|$ bzw.) $|X_k|$ eine Frequenz-Achse ist und markieren Sie $k$-Werte und Frequenzwerte an einem Zahlenstrahl (eine $x$-Achse mit zwei Beschriftungen).

**Kurzlösung:**

banane

(a) $c_k$ gehört zu $\cos(kx)$; $X_k$ gehört $\cos(k\frac{2\pi}{T}x) = \cos(k\omega_0 x)$.

### Zusatz: Parseval'sche Formel und Effektivwert

Gegeben sind die reelle und die komplexe Fourierreihe eines Signals:

$$u(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

(a) Verwenden Sie beide Reihendarstellungen um den sogenannten quadratischen Mittelwert (s. ET3 Folie 1 - 4)[1] (das Quadrat des Effektivwerts) des Signals

[1] Ist $u(t)$ die Spannung an einem 1 Ohm Widerstand, so entspricht der $U$ der 'mittleren Leistung'.

zu berechnen:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t}$$
$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T \sum \ldots \cdot \sum \ldots \mathrm{d}\,t$$

Orthogonalität der Basisfunktionen nutzen!

(b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Parsevalschen Formel (s. Systemtheorie 1) und der Parseval'schen Gleichung (Ma3, Satz 12.19) .

**Kurzlösung:**

(a) Rechnen mit reeller Fourierreihe:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right]\cdot\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right]\mathrm{d}\,t \\ &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Merke:
Effektivwertquadrate der einzelnen Harmonischen addieren sich zum Effektivwertquadrat des Signals.
Rechnen mit komplexer Fourierreihe (da das Signal reell ist, gilt: $u(t) = u(t)^*$, $*$=konjugiert komplex):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)^*\cdot u(t)\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\omega_0 t}\cdot \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

(b) Parseval besagt, dass man die 'Gesamt-Leistung' eines Signals $\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t$ im Zeit- oder Frequenzbereich bestimmen kann. Das 'Spektrum' $c_k$ verrät also, wie die Gesamtleistung auf die verschiedenen Frequenzen verteilt ist.