Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1
4. Woche – Fourier-Reihen, Spektrum und Parseval

Fourier-Reihen Periode 2π

A1 $c_k \sim \frac{1}{k^?}$

Sie kennen aus Übung2, A6 bereits die Fourier-Reihe der 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1} \end{aligned}$$

und aus Übung3, A5 die Fourier-Reihe der 2π-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \le \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Dreiecks- und Rechteck-Funktion. Welche der beiden Funktionen ist stetig?

(b) Betrachten Sie die Proportionalität der Fourier-Koeffizienten beider Reihen bzgl. k und vergleichen Sie mit der Faustregel s. Ma3, nach Bsp. 12.23 .

A2 $a_k, b_k \rightsquigarrow$ **stetig oder nicht**

Betrachtet wird die folgende Fourier-Reihe einer reellen Funktion $f(x)$

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{4}{k^2}\cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k}\sin(kx)\right).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass die reellen Fourier-Koeffizient a_k bzw. b_k den geraden bzw. den ungeraden Anteil der rellen Funktion $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ widerspiegeln.

(b) Identifizieren Sie in obiger Reihe die a_k bzw. b_k. Betrachten Sie deren Verhalten für $k \to \infty$ und machen Sie mit Hilfe der Faustregel aus Ma3, nach Bsp. 12.23 eine Aussage darüber, ob der gerade oder ungerade Anteil eine stetige Funktion ist.

A3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Geradheit/Ungeradheit

Betrachtet wird folgende Funktion: $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

(a) Setzen Sie die Funktion direkt zu einer 2π-periodischen Funktion $F(x)$ fort und skizzieren Sie die Funktionskurve von $F(x)$. Stellen Sie fest, welche der Eigenschaften Stetigkeit, Differenzierbarkeit (jeweils stückweise oder auf ganz $\mathbb{R}$) bzw. Geradheit/Ungeradheit die Funktion $F(x)$ besitzt.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $F(x)$ und stellen Sie die Fourierreihe auf.

Fourier-Reihen Periode T

16.2 n) Kleinste Periode

Geben Sie die (kleinste) Periode T des folgenden Signals an:
$f(x) = x\cos(2x)$ für $|x| < 2\pi$ und $f(x + 4n\pi) = f(x)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Ü1 Aufgabe 16.4.

Die folgenden Funktionen f, die in jeweils einem Intervall (Länge T) angegeben werden, sind mit der Periode T periodisch fortzusetzen und in (komplexe) Fourierreihen

$f(x) = \sum c_k \exp\{(2\pi i k/T)x\}$, $\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zu entwickeln:

g) $x = t$, $f(t) = 0$ für $-T + \tau/2 < t < -\tau/2$, $f(t) = A$ für $|t| < \tau/2$ ($f(t)$: Rechteckimpulsfolge, τ/T : Tastverhältnis). Man skizziere $f(t)$ und $|c_k|$. Welche Eigenschaft von f garantiert das Reellsein von c_k ?

A4 Gegeben: Signal, gesucht: Periodendauer bzw. Grundfrequenz

Bestimmen Sie die Periode T und die Fourierkoeffizienten a_k, b_k $k \in \mathbb{N}$ der Funktion

$$u(t) = u_a \cos(2\pi f_a t) + u_b \cos(2\pi f_b t)$$

für die Fälle

(a) $\quad f_b = 2f_a$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad f_b = \frac{3}{2} f_a$.

(Hinweis: Der Weg über die Berechnung der a_k, b_k mittels der Integralformel ist nicht der kürzeste. Die reelle Fourierreihe steht schon da!)

A5 Zusammenhang a_k, b_k, c_k und 'komplexer Zeiger'

Geben Sie für das folgende Signal die Koeffizienten der reellen UND der komplexen Fourierreihe sowie den in der VL Dynamische Netzwerke genutzten 'komplexen (Effektivwert-)Zeiger' $\underline{U}$ an:

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{T}$$

Spektrum und Parseval

A6 Spektrum c_k: k-Achse = Frequenz-Achse

(a) Machen Sie sich klar, dass jeder Fourier-Koeffizient c_k bzw. X_k einer bestimmten Frequenz zugeordnet ist. $|c_k|$ bzw. $|X_k|$ entsprechen der (halben) Amplitude einer im Signal (als Summand) enthaltenen harmonischen Schwingung welcher Frequenz?

(b) Machen Sie sich klar, dass die 'k-Achse' des **Spektrums** ($|c_k|$ bzw.) $|X_k|$ eine Frequenz-Achse ist und markieren Sie k-Werte und Frequenzwerte an einem Zahlenstrahl (eine x-Achse mit zwei Beschriftungen).

Zusatz: Parseval'sche Formel und Effektivwert

Gegeben sind die reelle und die komplexe Fourierreihe eines Signals:

$$u(t) = a_0 + \sum_1^\infty \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

(a) Verwenden Sie beide Reihendarstellungen um den sogenannten quadratischen Mittelwert (s. ET3 Folie 1 - 4)[1] (das Quadrat des Effektivwerts) des Signals zu berechnen:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t}$$

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T \sum \ldots \cdot \sum \ldots \mathrm{d}\,t$$

Orthogonalität der Basisfunktionen nutzen!

(b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Parsevalschen Formel (s. Systemtheorie 1) und der Parseval'schen Gleichung (Ma3, Satz 12.19) .

[1] Ist $u(t)$ die Spannung an einem 1 Ohm Widerstand, so entspricht der U der 'mittleren Leistung'.