Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

3. Woche – Projektion auf orthogonale Basis, Bedeutung c_0, keine punktweise Konvergenz

A1 Projektion auf orthogonale Basis

In Ma1, Bsp. 6.26 haben Sie die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots$$

kennen gelernt und erfahren, dass die Faktoren λ_i im Falle einer orthogonalen Basis durch Projektion des Vektors $\underline{v}$ auf die Basisvektoren mit Hilfe von Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Vektornorm $\|.\|$ bestimmt werden:

$$\lambda_i = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle}{\|\underline{b}^i\|^2} \tag{0.1}$$

(a) Wiederholen Sie die Begriffe Vektorraum, orthogonale Basis, Skalarprodukt und Vektornorm.

(b) Woran erkennen Sie, dass zwei (Basis-)Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^2$ zueinander orthogonal sind?

(c) Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^3$ eine **orthogonale** Basis bilden?

(d) Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^3$ eine **orthnormale** Basis bilden?

(e) In $C[-\pi, \pi]$ ist der Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen.

   i. Woran erkennen Sie, ob die beiden Elemente dieses Vektorraums $\underline{b}^1 = \cos(x)$ und $\underline{b}^2 = \sin(x)$ zueinander orthogonal sind?

   ii. Welchen Unterraum des $C[-\pi, \pi]$ spannen diese beiden Vektoren auf, d.h. welche Funktionen lassen sich als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen.

   iii. Wie bestimmen Sie für eine Funktion $f(x)$ aus dem Unterraum, s. (ii), die Koeffizienten λ_1, λ_2 bzgl. dieser Basis:

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)?$$

(f) Ein weiterer Vektorraum ist $\mathcal{P}_2[-1, 1]$ - der Raum der Polynome vom maximalen Grad 2 auf $[-1, 1]$, s. auch Ma1, Bsp. 6.10. Eine Basis dieses Vektorraumes sind die 'Basis';-)polynome $\{1, x, x^2\}$, allerdings sind diese auf $[-1, 1]$ nicht orthogonal: $\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, \mathrm{d}\, x \neq 0$. Hingegen bilden $\{1, x, a+bx+cx^2\}$ mit geeigneten Koeffizienten a, b, c eine orthogonale Basis. Welche Gleichungen müssen a, b, c erfüllen, damit $\{\frac{1}{\sqrt{(2)}}, \frac{x}{\sqrt{(2/3)}}, a + bx + cx^2\}$ sogar eine orthonormale Basis des $\mathcal{P}_2[-1, 1]$ ist?

Kurzlösung:

(a) ...

(b) $\langle \underline{b}^1, \underline{b}^2 \rangle = 0$.

(c) $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = 0$ für $i \neq j$.

(d) $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta).

(e)
  i. $\langle \cos(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(x) \,\mathrm{d}\, x = 0$.
  ii. $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = A \cos(x + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$.
  iii. analog 0.1.

$$\lambda_1 = \frac{\langle f(x), \cos(x) \rangle}{\langle \cos(x), \cos(x) \rangle}, \quad \lambda_1 = \frac{\langle f(x), \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle}$$

(f) $c = -3a, b = 0, a = \frac{\sqrt{5/2}}{2}$

A2 Optimal - in welchem Sinne?

Die Fourier-Polynome verwenden **optimale** Fourier-Koeffizienten c_k, s. Ma3, Bsp. 12.11

In welchem Sinne sind die Fourier-Koeffizienten c_k optimal?

Kurzlösung: c_k so, dass Abstand (L^2-Norm) $f(x) - P_n(x)$ minimal.

A3 c_0 'sehen'!

Betrachtet wird das Rechtecksignal im Ma3, Bsp. 12.14 .

(a) Lesen Sie aus dem Graphen des Signals seinen (zeitlichen) Mittelwert ab.

(b) Vergleichen Sie $c_0 = a_0$ mit (a).

(c) Zeichnen zu $f(x)$ den Graphen von $P_0(x)$ dazu.

(d) Reflektieren Sie in der ET gebräuchliche Begriffe wie Gleichstromanteil, DC-component, Offset im Zusammenhang mit $P_0(x)$ und $c_0 = a_0$.

Kurzlösung:

(d) $c_0 = a_0 =$ zeitlicher Mittelwert $=$ Gleichstromanteil $= \dots$

A4 Konvergenz aber nicht an jedem Punkt

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Skizzieren Sie f! In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$?

Kurzlösung:

Skizze: ein Kamm mit 'Zinken' bei $-3 : 0.5 : 3$
f ist nur an endlich vielen Punkten ungleich Null $\Rightarrow$ alle a_k, b_k sind gleich Null.
Die Fourierreihe konvergiert also wunderbar, allerdings nicht für alle x gegen f ...
Sie konvergiert folglich nicht punktweise gegen f sondern nur im ...

A5 Verstehen durch Sehen

Die 2π-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$ (periodisch fortsetzen!) wird durch folgende Funktionenreihe dargestellt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k_0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Ist das eine Fourier-Reihe?

(b) Zeichnen Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(c) Zeichnen Sie die ersten 3 Summanden $\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi}\cos x, -\frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2}$ und deren Summe im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und vergleichen Sie mit (b).

Kurzlösung:

(a) Ja!

16.1 e) f **gerade/ungerade** $\rightsquigarrow$ a_k, b_k

Welche Fourierkoeffizienten der Fourierentwicklung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi kx/T) + b_k \sin(2\pi kx/T))$ sind gewiss gleich Null, falls f gerade [bzw. ungerade] bezüglich $x = 0$ ist?

Kurzlösung: f gerade Funktion: $b_k = 0$; ungerade Funktion: $a_k = 0$.

Ü1 Aufgabe 16.2.e

Die folgende 2π-periodische Funktion f ist in eine Fourier-Reihe

$f(x) = a_0 + \sum \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big), \quad (k = 1, 2, \ldots)$ zu entwickeln.

Zusatz: An denjenigen Stellen x, wo die Angabe von $f(x)$ im Intervall der Länge 2π fehlt, ist f so zu definieren, dass auch dort die Reihe die Funktion f darstellt.

e) $f(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$, $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$, $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$
Betrachten Sie die Reihe speziell für $x = \frac{\pi}{2}$.

Kurzlösung:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} [\frac{x^2}{2}]\Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=0}^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2\pi}[\cos(k\pi) - 1] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\dfrac{2}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=0}^{\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

Somit ist

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sin(kx).$$

Ü1 Aufgabe 16.4.a

Die folgende Funktion f, die im Intervall der Länge 2π angegeben wird, ist mit der Periode 2π periodisch fortzusetzen und in die (komplexe) Fourierreihe

$f(x) = \sum c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zu entwickeln:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, (|x| < \pi)$,

Kurzlösung:

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \ldots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Damit ist

$$f(x) = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (2 + \mathrm{i}k)}{4 + k^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$