

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

3. Woche – Projektion auf orthogonale Basis, Bedeutung c_0 , keine punktweise Konvergenz

A1 Projektion auf orthogonale Basis

In [Ma1, Bsp. 6.26](#) haben Sie die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots$$

kennen gelernt und erfahren, dass die Faktoren λ_i im Falle einer orthogonalen Basis durch Projektion des Vektors \underline{v} auf die Basisvektoren mit Hilfe von Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Vektornorm $\|\cdot\|$ bestimmt werden:

$$\lambda_i = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle}{\|\underline{b}^i\|^2} \quad (0.1)$$

- Wiederholen Sie die Begriffe Vektorraum, orthogonale Basis, Skalarprodukt und Vektornorm.
- Woran erkennen Sie, dass zwei (Basis-)Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^2 zueinander orthogonal sind?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^3 eine **orthogonale** Basis bilden?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^3 eine **orthnormale** Basis bilden?
- In $C[-\pi, \pi]$ ist der Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen.
 - Woran erkennen Sie, ob die beiden Elemente dieses Vektorraums $\underline{b}^1 = \cos(x)$ und $\underline{b}^2 = \sin(x)$ zueinander orthogonal sind?
 - Welchen Unterraum des $C[-\pi, \pi]$ spannen diese beiden Vektoren auf, d.h. welche Funktionen lassen sich als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen.
 - Wie bestimmen Sie für eine Funktion $f(x)$ aus dem Unterraum, s. (ii), die Koeffizienten λ_1, λ_2 bzgl. dieser Basis:

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)?$$

- Ein weiterer Vektorraum ist $\mathcal{P}_2[-1, 1]$ - der Raum der Polynome vom maximalen Grad 2 auf $[-1, 1]$, s. auch [Ma1, Bsp. 6.10](#). Eine Basis dieses Vektorraumes sind die 'Basis;-)polynome $\{1, x, x^2\}$, allerdings sind diese auf $[-1, 1]$ nicht orthogonal: $\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx \neq 0$. Hingegen bilden $\{1, x, a + bx + cx^2\}$ mit geeigneten Koeffizienten a, b, c eine orthogonale Basis. Welche Gleichungen müssen a, b, c erfüllen, damit $\{\frac{1}{\sqrt{(2)}}, \frac{x}{\sqrt{(2/3)}}, a + bx + cx^2\}$ sogar eine orthonormale Basis des $\mathcal{P}_2[-1, 1]$ ist?

A2 Optimal - in welchem Sinne?

Die Fourier-Polynome verwenden **optimale** Fourier-Koeffizienten c_k , s. Ma3, Bsp. 12.11

In welchem Sinne sind die Fourier-Koeffizienten c_k optimal?

A3 c_0 'sehen'!

Betrachtet wird das Rechtecksignal im Ma3, Bsp. 12.14 .

- Lesen Sie aus dem Graphen des Signals seinen (zeitlichen) Mittelwert ab.
- Vergleichen Sie $c_0 = a_0$ mit (a).
- Zeichnen zu $f(x)$ den Graphen von $P_0(x)$ dazu.
- Reflektieren Sie in der ET gebräuchliche Begriffe wie Gleichstromanteil, DC-component, Offset im Zusammenhang mit $P_0(x)$ und $c_0 = a_0$.

A4 Konvergenz aber nicht an jedem Punkt

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π -periodischen Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} !$$

Skizzieren Sie $f!$ In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$?

A5 Verstehen durch Sehen

Die 2π -periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$ (periodisch fortsetzen!) wird durch folgende Funktionenreihe dargestellt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k_0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

- Ist das eine Fourier-Reihe?
- Zeichnen Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.
- Zeichnen Sie die ersten 3 Summanden $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{4}{\pi} \cos x$, $-\frac{4}{\pi} \frac{\cos 3x}{3^2}$ und deren Summe im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und vergleichen Sie mit (b).

16.1 e) f gerade/ungerade $\rightsquigarrow a_k, b_k$

Welche Fourierkoeffizienten der Fourierentwicklung

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi kx/T) + b_k \sin(2\pi kx/T))$ sind gewiss gleich Null, falls f gerade [bzw. ungerade] bezüglich $x = 0$ ist?

Ü1 Aufgabe 16.2.e

Die folgende 2π -periodische Funktion f ist in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ zu entwickeln.}$$

Zusatz: An denjenigen Stellen x , wo die Angabe von $f(x)$ im Intervall der Länge 2π fehlt, ist f so zu definieren, dass auch dort die Reihe die Funktion f darstellt.

- e) $f(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$, $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$, $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.
Betrachten Sie die Reihe speziell für $x = \frac{\pi}{2}$.

Ü1 Aufgabe 16.4.a

Die folgende Funktion f , die im Intervall der Länge 2π angegeben wird, ist mit der Periode 2π periodisch fortzusetzen und in die (komplexe) Fourierreihe

$$f(x) = \sum c_k e^{ikx}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ zu entwickeln:}$$

- a) $f(x) = e^{2x}$, ($|x| < \pi$),