Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
2. Woche – Trigonometrische Reihen, Fourier-Reihe, $L^2(-\pi,\pi)$

A1 Trigonometrische Polynome

Sie haben die trigonometrischen Polynome (Ma3, 12.1) kennen gelernt.

(a) Unter welcher Bedingung an die komplexen Koeffizienten c_k und c_{-k} ist $P_n(x) \in \mathbb{R}$ für alle x?

(b) Geben Sie die $c_k, k = 0, 1, 2$ an für

$$P_2(x) = 1 + 2\cos(x) + 3\sin(2x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) Geben Sie für

$$P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = A_1 (\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x)) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

$c_1, |c_1|$ sowie $\arg(c_1)$ an.

Kurzlösung:

(a) $P_n(x)$ ist reell, wenn alle $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, also $c_0 \in \mathbb{R}$ und $c_k = \overline{c_{-k}}, k = 1, \ldots, n$.

(b) Wegen $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$, s. VL, ist $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)$ (*), also

$$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = -\mathrm{i}\frac{3}{2}$$

Merke: $\mathrm{Re}(c_k)$ = Hälfte des Koeffizienten vor $\cos(kx)$.
$-\mathrm{Im}(c_k)$ = Hälfte des Koeffizienten vor $\sin(kx)$.

(c) $P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = \underbrace{A_1 (\cos(\varphi)}_{a_1} \cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x)) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$

$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - \mathrm{i}b_1)$ s. (*), also $c_1 = \frac{A_1}{2} (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$
$|c_1| = \frac{A_1}{2}$ und $\arg(c_1) = \varphi$.
Merke: Betrag und Winkel von c geben die (halbe) Amplitude und die Phase der harmonischen Schwingung an.

A2 Trigonometrisches Polynom = endliche Fourier-Reihe

Zeichnen sie die folgenden Funktionen im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $\cos(x)$, $-\sin(x)$,

(b) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$, 'addieren' Sie die Funktionen aus (a) graphisch.

(c) Lesen Sie vom Graphen (b) Amplitude und Phase, also A, φ für $f(x) = A\cos(x + \varphi)$ ab.

Kurzlösung:

(c) $A = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

A3 Knowing c_0 and c_1 is knowing the signal $P_1(x)$

Gegeben sind die folgenden Koeffizienten der **reellen** trigonometrischen Polynome $P_1(x) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$. Geben Sie jeweils c_{-1} an und zeichnen Sie das zugehörige $P_1(x)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$,

(b) $c_0 = 1, c_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$,

(c) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

Kurzlösung: $c_{-1} = \overline{c_1}$.

(a) $1 + \cos(x)$,

(b) $1 + \sin(x)$,

(c) $1 + \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$, s. A5 c).

A4 Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung: Konvergenz

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

(a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?

(b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an a_k, b_k) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle x** zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan(\frac{-b_k}{a_k}) \end{aligned}$$

Kurzlösung:

(a) notwendiges Kriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium (QK), Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Minoranten-Kriterium,

(b) Die Fourier-Reihe konvergiert **für alle x** wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergiert.

A5 L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\pi, \pi)$

Sie haben das L^2-Skalarprodukt (Ma3, Def. 12.5) $\langle p, q\rangle$ mit $p, q : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ kennen gelernt.

(a) Ist $\langle p, p\rangle$ stets reell?

(b) Ist $\langle p, q\rangle$ stets reell?

(c) Geben Sie die L^2-Normen $\|\cos(x)\|_2$ und $\|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\|_2$ an. Gehören die Funktionen $\cos(x)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ zum $L^2(-\pi, \pi)$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen?

(d) Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}, & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

Für welche α gehört $f(x)$ zum $L^2(-\pi, \pi)$?

Kurzlösung:

(a) Ja. $\langle p, p\rangle = \|p\|_2^2$.

(b) Nein. Beispiele p, q für $\langle p, q\rangle$ reell/nicht reell nennen lassen.

(c) $\|\cos(x)\|_2 = \sqrt{\pi}$ und $\|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.
Ja, $\cos(x)$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in L^2(-\pi, \pi)$, da $\|\ldots\|_2$ endlich.

(d) Für $\alpha > -\frac{1}{2}$: $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$. Es gibt also Funktionen, die integrierbar (für $\alpha > -1$) aber nicht quadratintegrierbar sind.

Zusatz: L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Anstelle 2π-periodischer Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wollen wir jetzt T-periodische Funktionen im Intervall $[-T/2, T/2]$ betrachten.

(a) Geben Sie die Sinus- und Kosinus-Funktion mit der Periode T an und überprüfen Sie, dass diese tatsächlich T-periodisch sind.

(b) Wie berechnet sich im $L^2(-T/2, T/2)$ das Skalarprodukt bzw. die L^2-Norm?

(c) Geben Sie Skalarprodukt und Norm Ihrer Funktionen aus (a) an.

Kurzlösung:

(a) $\cos(2\pi x/T), \sin(2\pi x/T)$.
Eine Funktion $f(x)$ heißt T-periodisch, falls

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x+T) &= f(x) \\
\cos\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \checkmark \\
\sin\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \checkmark
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &:= \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}dx \\
||f||_{L^2([-T/2,T/2])} &:= \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\langle \cos(2\pi x/T), \sin(2\pi x/T)\rangle &:= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi x/T)\sin(2\pi x/T)\,dx = 0 \\
||\cos(2\pi x/T)||^2_{L^2([-T/2,T/2])} &:= \int_{-T/2}^{T/2} |\cos(2\pi x/T)|^2 dx = \frac{T}{2} \\
||\sin(2\pi x/T)||^2_{L^2([-T/2,T/2])} &:= \int_{-T/2}^{T/2} |\sin(2\pi x/T)|^2 dx = \frac{T}{2}
\end{aligned}
$$

A6 Konvergenz oder nicht

Für die 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

lautet die Fourier-Reihe:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Rechteck-Funktion. Ist diese Funktion stetig?

(b) Jede endliche Summe von stetigen Funktionen, z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen ist stetig. Gilt dies auch für eine unendliche Summe von stetigen Funktionen wie die Fourier-Reihe?

(c) Die Fourier-Reihe $F(x)$ (*) konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Funktion $f(x)$. Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $f(0)$ an. Überlegen Sie, ob die Reihe (*) auch punktweise gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, s. Ma3, Def. 12.10 .

Kurzlösung:

(a) nicht stetig.

(b) offenbar nicht.

(c) Da $F(0) = 0 \neq 1 = f(0)$ konvergiert die Fourier-reihe $F(x)$ **nicht punktweise** gegen $f(x)$, sondern nur **im quadratischen Mittel**.