Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

2. Woche – Trigonometrische Reihen, Fourier-Reihe, $L^2(-\pi,\pi)$

A1 Trigonometrische Polynome

Sie haben die trigonometrischen Polynome (Ma3, 12.1) kennen gelernt.

(a) Unter welcher Bedingung an die komplexen Koeffizienten c_k und c_{-k} ist $P_n(x) \in \mathbb{R}$ für alle x?

(b) Geben Sie die $c_k, k = 0, 1, 2$ an für

$$P_2(x) = 1 + 2\cos(x) + 3\sin(2x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) Geben Sie für

$$P_1(x) = A_1 \cos(x+\varphi) = A_1 \left(\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x)\right) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

$c_1, |c_1|$ sowie $\arg(c_1)$ an.

A2 Trigonometrisches Polynom = endliche Fourier-Reihe

Zeichnen sie die folgenden Funktionen im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $\cos(x), -\sin(x)$,

(b) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$, 'addieren' Sie die Funktionen aus (a) graphisch.

(c) Lesen Sie vom Graphen (b) Amplitude und Phase, also A, φ für $f(x) = A\cos(x+\varphi)$ ab.

A3 Knowing c_0 and c_1 is knowing the signal $P_1(x)$

Gegeben sind die folgenden Koeffizienten der **reellen** trigonometrischen Polynome $P_1(x) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$. Geben Sie jeweils c_{-1} an und zeichnen Sie das zugehörige $P_1(x)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$,

(b) $c_0 = 1, c_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$,

(c) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

A4 Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung: Konvergenz

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

(a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?

(b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an a_k, b_k) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle x** zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan(\frac{-b_k}{a_k}) \end{aligned}$$

A5 L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\pi,\pi)$

Sie haben das L^2-Skalarprodukt (Ma3, Def. 12.5) $\langle p, q\rangle$ mit $p, q : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ kennen gelernt.

(a) Ist $\langle p, p\rangle$ stets reell?

(b) Ist $\langle p, q\rangle$ stets reell?

(c) Geben Sie die L^2-Normen $\|\cos(x)\|_2$ und $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\|_2$ an. Gehören die Funktionen $\cos(x)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ zum $L^2(-\pi,\pi)$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen?

(d) Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}, & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

Für welche α gehört $f(x)$ zum $L^2(-\pi,\pi)$?

Zusatz: L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Anstelle 2π-periodischer Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wollen wir jetzt T-periodische Funktionen im Intervall $[-T/2, T/2]$ betrachten.

(a) Geben Sie die Sinus- und Kosinus-Funktion mit der Periode T an und überprüfen Sie, dass diese tatsächlich T-periodisch sind.

(b) Wie berechnet sich im $L^2(-T/2, T/2)$ das Skalarprodukt bzw. die L^2-Norm?

(c) Geben Sie Skalarprodukt und Norm Ihrer Funktionen aus (a) an.

A6 Konvergenz oder nicht

Für die 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$

lautet die Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \qquad (*) \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Rechteck-Funktion. Ist diese Funktion stetig?

(b) Jede endliche Summe von stetigen Funktionen, z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen ist stetig. Gilt dies auch für eine unendliche Summe von stetigen Funktionen wie die Fourier-Reihe?

(c) Die Fourier-Reihe $F(x)$ (*) konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Funktion $f(x)$. Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $f(0)$ an. Überlegen Sie, ob die Reihe (*) auch punktweise gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, s. Ma3, Def. 12.10 .