Ma 2/3 – lineare DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanter Matrix

$\dot{\underline{x}} - A\,\underline{x} = \underline{r}(t)$

$\underline{x}_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2$

homog. Lsg ↘

⊕ → allgem. Lsg $\xrightarrow[AB]{}$ konkrete Lsg.

part. Lsg. ↗

$x_p(t) = \ldots$ Ansatz nach Art der rechten Seite

Ü2 Aufgabe 26.2.

Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichungssysteme:

e) $\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underline{x} + \underline{\begin{pmatrix} 8 \\ 8\,e^{3t} \end{pmatrix}}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

1. homog. Lsg. : λ_i, V_i $\quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$, bel.

2. part. Lsg :

$r(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}}_{r_1(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{r_2(t)} e^{3t}$

Ansätze nach Art der rechten Seite – Systemfall

$\underline{r}(x)$ enthält	$\lambda_p = ?$, r–fach		Ansatz $\underline{y}_p(x) =$
$p_m(x)$	$\lambda_p = 0$	$\underline{Q}_{r+m}(x)$	
$p_m(x) \cdot e^{\alpha x}$	$\lambda_p = \alpha = 3$	$e^{\alpha x} \cdot \underline{Q}_{r+m}(x)$	

$\underline{x}_{p_1}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Ansatz in DGL system einsetzen!

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_{p_2}(t) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} e^{3t}$

$\dot{\underline{x}} = A\,\underline{x} + \underline{r}_2(t)$

$\begin{pmatrix} 3c\,\cancel{e^{3t}} \\ 3d\,\cancel{e^{3t}} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cancel{e^{3t}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cancel{e^{3t}}$

$3E \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

$(3E - A)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{x}_p(t) = \underline{x}_{p_1}(t) + \underline{x}_{p_2}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$

$\underline{x}(t) = x_H(t) + x_p(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -3 + 8\,e^{3t} \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$, bel.

3. AB : $\underline{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -3,\ c_2 = 2$