Ma 2 – lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ma 2/3 – lineare DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Matrizen

$\underline{\dot{x}} - A\,\underline{x} = \underline{r}(t)$

$\underline{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2$

homog. Lsg ↘

⊕ → allgem. Lsg $\xrightarrow[AB]{}$ konkrete Lsg.

part. Lsg. ↗

Ü2 Aufgabe 26.1. a

Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungssysteme:

a) $\dot{x} - 2x - 8y = 0, \quad \dot{y} - 3x + 8y = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\underline{x}}$$

EW: $\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 8 \\ 3 & -8-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-8-\lambda) - 24 = \lambda^2 + 6\lambda - 40$

$= (\lambda - 4)(\lambda + 10) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -10$

EV: $\lambda_1 = 4 \quad (A - 4E)\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -10 \quad \ldots$

$\underline{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

AB: $\underline{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} AB \text{ z.B. } = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 0$