Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – Lineare DGL 1. Ordnung: homogen oder nicht, TdV und VdK

1. **Homogen - inhomogen**
   Nur bei **linearen** DGL hat es Sinn, von homogen und inhomogen zu sprechen.
   Ordnen Sie 'homogen' und 'inhomogen' zu und geben je ein Beispiel an!

   $y'(t) = a(x)y(t) + g(x) : \ldots$

   $y'(t) = a(x)y(t) : \ldots$

2. **Wahr oder falsch**
   Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

   ( ) Die homogene Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

   ( ) Die homogene Lösung löst die homogene DGL.

   ( ) Die partikuläre Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

   ( ) Die partikuläre Lösung löst die inhomogene DGL.

   ( ) Mit jeder homogenen Lösung $y_H(t)$ ist auch $C \cdot y_H(t)$ homogene Lösung.

   ( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $C \cdot y_P(t)$ partikuläre Lösung.

   ( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $y_P(t) + C \cdot y_H(t)$ partikuläre Lösung.

3. **Fahrplan: Lösung inhomogener DGL 1. Ordnung (mit Anfangsbedingung)**
   Ordnen Sie die folgenden Arbeitsschritte in der richtigen Reihenfolge:

   - (Anpassen des konstanten Faktors C der homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist),
   - Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung zur 'allgemeinen' Lösung
   - Bestimmung der homogenen Lösung z.B. mit Trennung der Variablen (TdV)
   - Bestimmung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten (VdK).

4. **Allgemein statt Konkret: VdK**
   In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.19 wie sich die DGL zur Bestimmung der 'variierten' Konstanten durch Aufheben gewisser Terme ergibt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

   (a) Den Ansatz $y(x) = K(x) \cdot y_h(x)$ ableiten,

   (b) in die lineare DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ einsetzen und

   (c) berücksichtigen, dass $y_h(x)$ die homogene DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ erfüllt.

   Lösung:

   (a) $y(x) = K(x) \cdot y_h(x) \ \Rightarrow\ y'(x) = K'(x)y_h(x) + K(x)y_h'(x)$

   (b) $a(x)\left[K'(x)y_h(x) + K(x)y_h'(x)\right] + b(x)K(x)y_h(x) = c(x)$

   (c) $a(x)K'(x)y_h(x) + K(x)\underbrace{\left[a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x)\right]}_{=0,\text{ da homogene Lsg.}} = c(x) \ \Rightarrow\ K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\frac{1}{y_h(x)}$

5. **Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL**
   In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.23 dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer lineararen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

   (a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,

   (b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form
   $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}$ ersetzen und

   (c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

   Lösung:

   (a) $u(t) = (y(t))^{1-\alpha} \ \Rightarrow\ u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t)$

   (b) $u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\left[a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}\right]$

   (c) $\underline{\underline{u'(t)}} = (1-\alpha)[a(t)\underbrace{(y(t))^{1-\alpha}}_{=u(t)} + b(t)] = \underline{\underline{(1-\alpha)\,[a(t)u(t) + b(t)]}}$

6. **Tailor your ODE!**
   Sie wollen eine DGL finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

   (a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).

   (b) Geben Sie die (exakte) DGL dieser Kurvenschar an.

   Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung exakter DGLs (Gegeben und Gesucht vertauscht).

   Lösung:

   (a) Z.B. Schar der Höhenlinien eines Sattels (Hyperbeln) $z = x^2 - y^2 = \Phi(x,y) = C$.

   (b) (exakte) DGL: $\Phi_x + \Phi_y y' = \underbrace{2x}_{p} + \underbrace{-2y}_{q}\,y' = 0$.

7. **Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL**
Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \overset{z.B.}{=} \Phi(x, y)$ eine Rolle, s. Satz 9.30; bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x, y) = 0$ verwenden), s. Satz 10.11; und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x, y) = c$, s. VL 11.2.

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

Lösung:

Thema	Fragestellung	Gegeben	Gesucht	Zusammenhang
Kurvenintegral	$\int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{F}\, \mathrm{d}\,\underline{s} \overset{?}{=} \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$	$\underline{F}$	Φ	$\underline{F} = \operatorname{grad}\Phi$ wenn $\operatorname{rot}\Phi = \underline{0}$
Implizite Funktion	$y \overset{?}{=} y(x)$	$\Phi(x, y) = 0$	ja/nein bzw. $y'(x)$	$y'(x) = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ wenn $\Phi_y \neq 0$
Exakte DGL	Existiert implizite Lsg.?	$p + qy'(x) = 0$	$\Phi(x, y) = c$	$p = \Phi_x, q = \Phi_y$ wenn $p_y = q_x$

Oder kompakter

Kurvenintegral: $\operatorname{grad}\Phi \Rightarrow \Phi$

Implizite Funktion: $\Phi = 0 \Rightarrow \text{DGL} \Rightarrow y'$

Exakte DGL: $\text{DGL} \Rightarrow \Phi = c$