

## Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

### 12. Woche – DGL 1. Ordnung: separabel / linear / eindeutige Lsg.

#### 1. Wahr oder falsch

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

- Die DGL  $y'(t) = f(x, y(t))$  ist linear, wenn  $f$  linear in  $x$  ist.
- Die DGL  $y'(t) = f(x, y(t))$  ist linear, wenn  $f$  linear in  $y(t)$  ist.
- $f$  ist linear in  $y(t)$ , wenn die DGL  $y'(t) = f(x, y(t))$  linear ist.
- Die DGL  $y'(t) = f(x, y(t))$  ist linear, wenn  $f = a(x)y(t) + g(x)$  ist.

#### 2. Klassifikation DGL 1. Ordnung: separabel, linear

Klassifizieren Sie die Aufgaben U2/24.15 a-f,n:

Welche DGL sind separabel (Gruppe I) und welche sind linear (Gruppe II).

Fertigen Sie ein Venn-Diagramm an.

Zusatz für Fortgeschrittene: **Existenz und Eindeutigkeit der Lösung**

- (a) Welche Lösung hätte die Anfangswertaufgabe (AWA) 24.9 b mit der Anfangsbedingung  $y(1) = -1$ ? Erfüllt diese AWA die Bedingung für Eindeutigkeit der Lösung in [Satz 11.6](#)?  
**Lösung:** Sowohl die Lösung  $y(x) = \frac{1}{4}(x+C)^2 - 1$ , mit  $C = -1$  (für  $x \geq 1$ , da  $y \geq -1$ !) als auch die Lösung  $y \equiv -1$  erfüllen diese AWA. Die Lösung ist nicht eindeutig.  
Die DGL erfüllt bei  $y = -1$  **nicht** Bedingung im [Satz 11.6 2](#)): die Wurzelfunktion  $\sqrt{y+1}$  hat dort keine beschränkte Ableitung ( $f$  hat keine beschränkte partielle Ableitung bzgl.  $y$ ).
- (b) Erfüllt die AWA 24.9 g die Bedingung in [Satz 11.6](#)? Welchen Wert nimmt die Lösung für  $x = 2$  an?  
**Lösung:** Die AWA mit der Anfangsbedingung  $x_0 = 0, y_0 = -1$  erfüllt die Bedingungen in [Satz 11.6](#). Jedoch ist das durch den Satz garantierte Existenzintervall endlich: die Lösung dieser AWA  $y(x) = -(1 - \frac{2}{3}x^3)^{-1/2}$  existiert nur für  $-\sqrt[3]{3/2} < x < \sqrt[3]{3/2}$ . Sie hat eine 'endliche Fluchtzeit', heißt geht bereits für  $x = \sqrt[3]{3/2}$  gegen unendlich und existiert eben nicht mehr für  $x = 2$ .
- (c) Bei Aufgabe 24.12 b 'sieht' man sofort eine Lösung  $y \equiv -1$  die auch noch die Anfangsbedingung erfüllt. Erfüllt die DGL in einem Intervall um  $x = 1$  Bedingung im [Satz 11.6](#) und ist damit die 'gesehene' Lösung sicher die Einzige?  
**Lösung:** Die DGL  $y' = -(y+1)\ln(x)/x$  erfüllt nur in  $x = 0$  nicht die Bedingungen im [Satz 11.6](#). Um den gegebenen Anfangswert  $x = 1$  sind die Bedingungen erfüllt und damit ist die 'gesehene' Lösung (in einem Intervall um  $x = 1$ ) sicher die Einzige.