

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 10. Woche - Motivation: Optimierung mit Nebenbedingung

1. Anwendung Optimierung

In den ersten beiden Semester müssen fast alle Studierenden der Fakultät Elektrotechnik das Modul Informatik belegen. Dies besteht aus einer Prüfung im ersten Semester und einer Prüfung sowie Projektarbeit im 2. Semester. Es besteht die Möglichkeit, die Projektarbeit nicht zu schreiben, solange die Noten aus den Prüfungen gut genug sind.

Ist die Projektarbeit bestanden, ist die Note des Moduls das arithmetische Mittel aus den beiden Prüfungen, also:

$$N = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Ist die Projektarbeit nicht bestanden, ergibt sich die Note folgendermaßen:

$$N = 0,2 \cdot P_1 + 0,2 \cdot P_2 + 0,6 \cdot 5$$

Um die Projektarbeit zu bestehen sind 60 Stunden Arbeitszeit vornöten.

Die Note der Prüfung im ersten Semester lässt sich wie folgt aus dem Arbeitsaufwand fürs Selbststudium berechnen.

$$P_1 = 6 \cdot e^{-\frac{t_1}{50}}$$

Die Note der Prüfung im 2. Semester lässt folgendermaßen berechnen:

Projektarbeit bestanden:

$$P_2 = 6 \cdot e^{-\frac{t_2}{10}}$$

Projektarbeit nicht bestanden:

$$P_2 = 6 \cdot e^{-\frac{t_2}{50}}$$

Wobei die Variablen t_1 und t_2 in Stunden angegeben werden.

Aufgabe Du möchtest in dem Modul eine möglichst gute Note schreiben und hast über das Jahr hundert Arbeitsstunden Zeit, die du in das Modul stecken kannst. Wie teilst du diese Zeit optimal auf, um eine möglichst gute Gesamtnote zu kriegen.

Lösung Es ist eine Fallunterscheidung (Projektarbeit bestanden / nicht bestanden) nötig.

Projektarbeit bestanden

$$N = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{6 \cdot e^{-\frac{t_1}{50}} + 6 \cdot e^{-\frac{t_2}{10}}}{2} = 3 \cdot e^{-\frac{t_1}{50}} + 3 \cdot e^{-\frac{t_2}{10}}$$

Nebenbedingung

$$t_1 + t_2 + 60 = 100$$

$$t_1 + t_2 - 40 = 0$$

Lagrange Funktion

$$L(t_1, t_2, \lambda) = 3 \cdot e^{-\frac{t_1}{50}} + 3 \cdot e^{-\frac{t_2}{10}} + \lambda \cdot (t_1 + t_2 - 40)$$

Notwendige Bedingung

$$L_{t_1} = -\frac{3}{50}e^{-\frac{t_1}{50}} + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_{t_2} = -\frac{3}{10}e^{-\frac{t_2}{10}} + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_\lambda = t_1 + t_2 - 40 \stackrel{!}{=} 0$$

Die erste Gleichung nach λ umformen und in die zweite einsetzen führt zu

$$-\frac{3}{50}e^{-\frac{t_1}{50}} + \frac{3}{10}e^{-\frac{t_2}{10}} = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$t_2 = 40 - t_1$$

Eingesetzt in obere Gleichung folgt.

$$-\frac{3}{50}e^{-\frac{t_1}{50}} + \frac{3}{10}e^{-\frac{40-t_1}{10}} = 0$$

$$5 \cdot e^{-\frac{40-t_1}{10}} = e^{-\frac{t_1}{50}}$$

$$\ln(5) - \frac{40-t_1}{10} = \frac{-t_1}{50}$$

$$\ln(5) - 4 = -\frac{6}{50}t_1$$

$$t_1 = -\frac{\ln(5) - 4}{\frac{6}{50}}$$

$$t_1 = 19,92 \approx 20$$

Daraus folgt

$$t_2 = 40 - 20 = 20$$

und als Gesamtnote

$$\frac{6 \cdot e^{-\frac{20}{50}} + 6 \cdot e^{-\frac{20}{10}}}{2} = 2,4$$

Projektarbeit nicht bestanden / geschrieben

$$N = 0,2 \cdot P_1 + 0,2 \cdot P_2 + 0,6 \cdot 5 = \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{t_1}{50}} + \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{t_2}{50}} + 0,6 \cdot 5$$

Nebenbedingung

$$t_1 + t_2 = 100$$

$$t_1 + t_2 - 100 = 0$$

Lagrange Funktion

$$L(t_1, t_2, \lambda) = \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{t_1}{50}} + \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{t_2}{50}} + \lambda \cdot (t_1 + t_2 - 100)$$

Notwendige Bedingung

$$L_{t_1} = -\frac{6}{250} e^{-\frac{t_1}{50}} + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_{t_2} = -\frac{6}{250} e^{-\frac{t_2}{50}} + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_\lambda = t_1 + t_2 - 100 \stackrel{!}{=} 0$$

Die erste Gleichung nach λ umformen und in die zweite einsetzen führt zu

$$t_1 = t_2$$

Somit folgt aus der Nebenbedingung

$$t_1 = t_2 = 50$$

und als Gesamtnote

$$N = \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{50}{50}} + \frac{6}{5} \cdot e^{-\frac{50}{50}} + 0,6 \cdot 5 = 3,9$$

Fazit Es lohnt sich die Projektarbeit zu schreiben.