Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

9. Woche – Taylor, Jacobi-Matrix + Kettenregel, inplizite Funktion

1. **Taylor, Taylor, Taylor**

   (a) **eindimensional**

   i. Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist.

   ii. Geben Sie den 'Fehler' (Differenz zwischen Funktion und Taylornäherung) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ sowie seine erste und zweite Ableitung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an ;-).

   (b) **zweidimensional**

   i. Geben Sie eine Funktion $f(\underline{x})$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{0}$) $T_2(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$ ist.

   ii. Geben Sie den 'Fehler' $R_2(\underline{x}) = f(\underline{x}) - T_2(\underline{x})$ sowie seinen Gradienten und seine Hesse-Matrix an der Entwicklungsstelle $\underline{x}_0 = 0$ an ;-).

   Lösung:

   (a) i. z.B. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ oder $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 7x^3$;-)

   ii. $R_2(0) = (f - T_2)(0) = 0$ sowie $R_2'(0) = (f - T_2)'(0) = 0$ und $R_2''(0) = (f - T_2)''(0) = 0$, s. auch Ma1 Folien 4_5 ;-)

   (b) i. z.B. $f(x) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + 7x^3 + x^2y^2 + 2y^5$;-)

   ii. $R_2(\underline{0}) = (f - T_2)(\underline{0}) = 0$ sowie $\nabla R_2(\underline{0}) = \nabla(f - T_2)(\underline{0}) = \underline{0}$ und $H_{R_2}(0) = H_{f-T_2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, s. auch Ma2 Folien 10_1 ;-)

2. **Kettenregel - Polarkoordinaten**

   Betrachtet wird die Funktion $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi)$, Funktion P in Bsp. 8.28, Polarkoordinaten sowie deren Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y)$, s. Funktion g in Beispiel 10.6.

   Verwenden Sie beide Funktionen in Satz 10.5, Kettenregel und ermitteln Sie das Produkt der beiden Jacobi-Matrizen (von f und f^{-1}). Das Ergebnis steht laut Kettenregel vorher fest (Welche Funktion h stellt die Verkettung von f und f^{-1} dar? ;-)) !

   Lösung:

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan y/x \end{pmatrix}, \quad J_{f^{-1}} = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$, s. Beispiel 10.6

$$J_f \cdot J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Kartesische K. $\leftrightarrow$ Kugelkoordinaten - eindeutig?**
Überprüfen Sie, in welchen Fällen die Kugelkoordinaten eine (eindeutige) Funktion der kartesischen Koordinaten sind, indem Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 anwenden!
Bringen Sie also die explizite Form $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = K(\underbrace{r, \varphi, \theta}_{\underline{y}})$ (Bsp. 8.28) in die implizite Form $\underline{x} - K(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Überprüfen Sie nun die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen.

Lösung: Die Jacobi-Matrix $J_{f,\underline{y}} = \frac{\partial f}{\partial(r,\varphi,\theta)}$ ist gleich der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten, s. Bsp. 8.28. Diese ist singulär, wenn die Funktionaldeterminante $\det(J_{f,\underline{y}}) = r^2 \cos\theta$ verschwindet, also für $r = 0$ oder $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ('Nord- und Süd-pol'). In allen anderen Fällen sind die Kugelkoordinaten eine eindeutige Funktion der kartesischen.

4. $f(x, y) = x - y^3 = 0$ **- eindeutig nach** y **auflösbar?**

   (a) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 an, um zu entscheiden, ob die Funktion $f(x, y) = x - y^3 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eindeutig nach y auflösbar ist.

   (b) Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und deren Umkehrfunktion.

   (c) Stellt (b) einen Widerspruch zu Ihrem Ergebnis von (a) dar, also ein 'Gegenbeispiel' zum Satz über implizite Funktionen? ;-)

   Lösung:

   (a) $(0, 0)$ ist ein gültiger Punkt, da $f(0, 0) = 0$. $J_{f,y} = f_y = -3y^2$ somit $f_y(0, 0) = 0, \Rightarrow$ Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen NICHT erfüllt.

   (b) Die Umkehrfunktion existiert: $y = x^{\frac{1}{3}}$ (auch um den Punkt $(0, 0)$).

   (c) Natürlich nicht! Das ist eben ein 'Wenn-Dann'-Satz. Er liefert nur hinreichende Bedingungen (im Gegensatz zu 'Genau-Dann-Wenn'-Sätzen, mit Bedingungen, die hinreichend UND notwendig sind).