Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

9. Woche – Taylor, Jacobi-Matrix + Kettenregel, inplizite Funktion

1. **Taylor, Taylor, Taylor**

   (a) **eindimensional**

   i. Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist.

   ii. Geben Sie den 'Fehler' (Differenz zwischen Funktion und Taylornäherung) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ sowie seine erste und zweite Ableitung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an ;-).

   (b) **zweidimensional**

   i. Geben Sie eine Funktion $f(\underline{x})$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{0}$) $T_2(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$ ist.

   ii. Geben Sie den 'Fehler' $R_2(\underline{x}) = f(\underline{x}) - T_2(\underline{x})$ sowie seinen Gradienten und seine Hesse-Matrix an der Entwicklungsstelle $\underline{x}_0 = 0$ an ;-).

2. **Kettenregel - Polarkoordinaten**

   Betrachtet wird die Funktion $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi)$, Funktion P in Bsp. 8.28, Polarkoordinaten sowie deren Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y)$, s. Funktion g in Beispiel 10.6.

   Verwenden Sie beide Funktionen in Satz 10.5, Kettenregel und ermitteln Sie das Produkt der beiden Jacobi-Matrizen (von f und f^{-1}). Das Ergebnis steht laut Kettenregel vorher fest (Welche Funktion h stellt die Verkettung von f und f^{-1} dar? ;-)) !

3. **Kartesische K. $\leftrightarrow$ Kugelkoordinaten - eindeutig?**

   Überprüfen Sie, in welchen Fällen die Kugelkoordinaten eine (eindeutige) Funktion der kartesischen Koordinaten sind, indem Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 anwenden!

   Bringen Sie also die explizite Form $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = K(\underbrace{r, \varphi, \theta}_{\underline{y}})$ (Bsp. 8.28) in die implizite Form $\underline{x} - K(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Überprüfen Sie nun die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen.

4. $f(x, y) = x - y^3 = 0$ **- eindeutig nach y auflösbar?**

   (a) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 an, um zu entscheiden, ob die Funktion $f(x, y) = x - y^3 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eindeutig nach y auflösbar ist.

   (b) Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und deren Umkehrfunktion.

(c) Stellt (b) einen Widerspruch zu Ihrem Ergebnis von (a) dar, also ein 'Gegenbeispiel' zum Satz über implizite Funktionen? ;-)