Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378) **inkl. Lösung**

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

8. Woche – 2D-Bereichsintegrale als Flächenintegral 1. Art, Sektorformel, ...

1. **Ebene 2D-Funktionaldeterminate** $= \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$
   Betrachten Sie noch einmal das 2-dimensionale Bereichsintegral in Aufgabe 2/20.9 d, s. Übung 4, z.B. mit $f(P) = 1$ (also Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches).

   (a) Beschreiben Sie den Bereich in geeigneten Polarkoordinaten?

   (b) Überzeugen Sie sich, dass die laut Satz 9.9 bei Koordinatentransformation **ebener** Bereiche zu verwendende Funktionaldeterminante nichts anderes als $\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$ der Parametrisierung (möglicherweise) **gekrümmter** Bereiche ist, s. Def 9.37.

   (c) Wiederholen Sie b) für elliptische Koordinaten (Aufgabe 2/20.19)

   Lösung:

   (a)
$$\underline{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad r = 0\ldots 1, \varphi = -\pi\ldots 0$$

   (b)
$$|\det(J_T)| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\right| = r$$
$$\|\underline{r}_r \times \underline{r}_\varphi\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\|_2 = r$$

   (c)
$$\underline{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos\varphi \\ br\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad r = 0\ldots 1, \varphi = 0\ldots 2\pi, \qquad |\det(J_T)| = \|\underline{r}_r \times \underline{r}_\varphi\|_2 = abr$$

2. **2D-Gauß $\Rightarrow$ Sektorformel zur Flächenberechnung**
   Verwenden Sie die Sektorformel Bem. 9.50 zur Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches in Aufgabe 2/20.9 d (also mit $f(P) = 1$).

   Lösung:
$$\underline{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = -\pi\ldots 0, \qquad \underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$A = \frac{1}{2}\oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \cos(\varphi) + 1\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{\pi}{2}$$
   Bemerkung: Auf dem 'Rückweg' von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ (um den Umlauf zu schließen) ist $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}'$ $\Rightarrow$ Integration über 0.

3. **2D-Gauß zur Flächenberechnung $\Rightarrow$ 3D-Gauß zur Volumenberechnung**
Der Trick bei der Sektorformel Bem. 9.50 ist die Anwendung Satzes von Gauß im 2D-Fall mit Wahl eines günstigen Vektorfeldes $\underline{v}$, dessen Divergenz konstant ist. Wenden Sie diese Idee zur Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß in 3D an. Wie wählen Sie das Vektorfeld $\underline{v}$ in diesem Fall?

Lösung:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{div} \underline{v} = 3$$

Mit Satz von Gauß $\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} \, \mathrm{d}\, V = \iint_{\partial V} \underline{v} \, \mathrm{d}\, A$ folgt

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} \underline{v} \, \mathrm{d}\, A$$

4. **Fläche in Archimedischer Spirale**
Berechnen Sie die Fläche, die von der Archimedischen Spirale

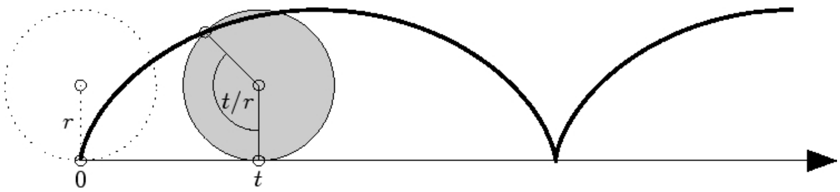
$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

bei der ersten Umdrehung eingeschlossen wird.

Lösung: Anwendung Sektorformel:

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') \, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 \, \mathrm{d}\, t = \frac{4}{3}\pi^3$$

5. **Abrollen eines Rades: Bogenlänge und Fläche der Zykloide**
Ein Rad mit Radius $r = 1$ rolle entlang einer Geraden. Betrachtet werde ein fester Punkt auf dem Rad.



(a) Leiten Sie die Kurve, die der Punkt beim Abrollen des Rades beschreibt, in Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ her. Wählen Sie dazu als Parameter t die Strecke zwischen Startpunkt und momentanem Berührungspunkt des Rades (s. Skizze).

(b) Berechnen Sie die Länge der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

(c) Berechnen Sie die Fläche unter der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

Lösung: Mit Radius $r = 1$:

(a) Mittelpunkt des Rades ist bei $M = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Punkt des Rades ist bei $\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

(b) Mit $\underline{\gamma}' = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ folgt

$$L = \int_\gamma \|\underline{\gamma}'\| \,\mathrm{d}\, t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} \,\mathrm{d}\, t = 2 \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2}) \,\mathrm{d}\, t = 8$$

(c) Um die Fläche in der richtigen Richtung zu umlaufen: 'Hinweg' von $(0, 0)$ nach $(2\pi, 0)$ mit $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}' \Rightarrow$ Integration über 0 und dann 'zurück' $t = 2\pi \ldots 0$:

$$A = \frac{1}{2} \oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') \,\mathrm{d}\, \varphi = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 2\cos(t) - 2 + t\sin(t) \,\mathrm{d}\, t = 3\pi$$