

## Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

### 3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante

#### 1. Kugelkoordinaten - warm up

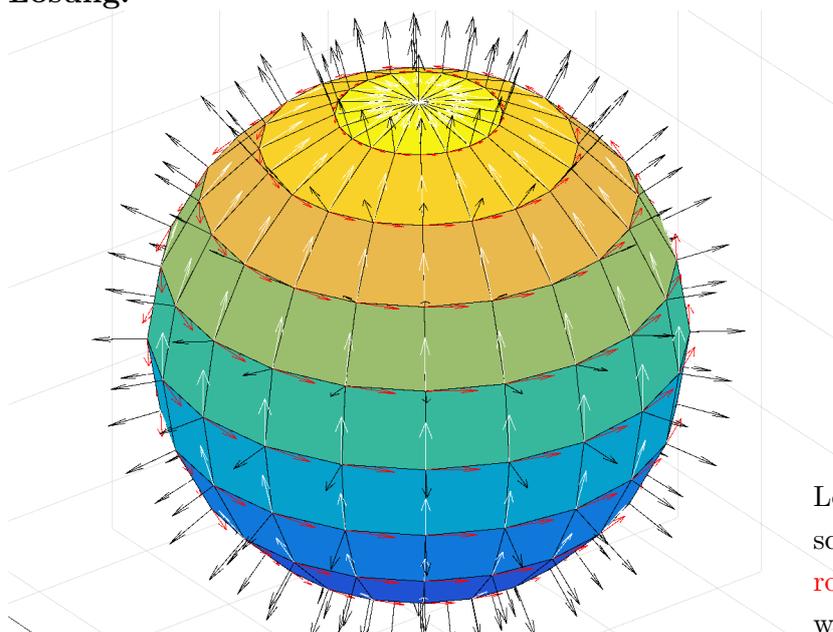
- Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten (VL 8.28) mit  $r = \text{konstant}$  beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel  $\varphi$  und  $\theta$  (in der VL  $\psi$ ) durchlaufen.
- Welche Flächen werden durch  $\varphi = \text{konstant}$  ( $r, \theta$  beliebig) bzw.  $\theta = \text{konstant}$  ( $r, \varphi$  beliebig) beschrieben?

#### 2. Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

- Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im  $\mathbb{R}^3$  die Richtungen vor, in denen  $r$  bzw.  $\varphi$  bzw.  $\theta$  zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$  (s. VL 8.28) - sind diese orthogonal zueinander?
- Rekapitulieren Sie die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?
- Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. VL 8.29.

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?

**Lösung:**



Legende:

- schwarze Pfeile: 1. Spalte Jacobi-Matrix
- rote Pfeile: 2. Spalte Jacobi-Matrix
- weiße Pfeile: 3. Spalte Jacobi-Matrix