# Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

## 3. Woche – Stetigkeit, partielle Ableitungen und 'Wann gilt Satz von Schwarz?'

1. **Stetig in** $(x, y) = (0, 0)$ **?**
   Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$u = \begin{cases} \frac{x\,y\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \frac{x^6+9\,x^4\,y^2-9\,x^2\,y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ ?, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   auf Stetigkeit in $(0, 0)$, indem Sie

   (a) Polarkoordinaten nutzen: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und
   (b) den Grenzwert $\lim_{r\to 0}$ betrachten und
   (c) evtl. den Grenzwert $\lim_{r\to 0}$ für $\varphi = 0$ sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ betrachten.

   **Lösung:** $u$ ist stetig, $v$ nicht!

2. **fröhliches Ableiten**
   Überzeugen Sie sich, dass für $u$ aus Aufgabe 1

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u = v \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

   gilt (Satz von Schwarz).

   **Lösung**

$$u = \frac{x\,y\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{2\,x^2\,y}{x^2+y^2} + \frac{y\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2\,y\,\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\,\left(x^4+4\,x^2\,y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = \frac{x\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} - \frac{2\,x\,y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,x\,y^2\,\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x\,\left(x^4-4\,x^2\,y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u &= \frac{x^4+4\,x^2\,y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{4\,y^2\,\left(x^4+4\,x^2\,y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} + \frac{y\,\left(8\,x^2\,y-4\,y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^6+9\,x^4\,y^2-9\,x^2\,y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u &= \frac{4\,x^2\,\left(-x^4+4\,x^2\,y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} - \frac{-x^4+4\,x^2\,y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{x\,\left(8\,x\,y^2-4\,x^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^6+9\,x^4\,y^2-9\,x^2\,y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}\end{aligned}$$

3. **fröhliches Ableiten $\Rightarrow$ Huch?!** (weiter mit $u$ aus Aufgabe 1)

(a) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}u$ für $x = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, y)$.

(b) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}u$ für $y = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$.

(c) Geben Sie ((a) und (b) nutzend) $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(0, 0)$ an. Warum gilt hier der Satz von Schwarz nicht?

**Lösung**

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \left.\frac{x^4\,y + 4\,x^2\,y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\right|_{x=0} = -y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \left.\frac{x^5 - 4\,x^3\,y^2 - x\,y^4}{(x^2 + y^2)^2}\right|_{y=0} = x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, 0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(0, 0)$$

Der Satz von Schwarz gilt selbstverständlich immer. Nur ist hier eine seiner Voraussetzungen nicht erfüllt: die zweite(n) partiellen Ableitungen sind in $(0, 0)$ nicht stetig, s. 1.