Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

1. Woche – Eigenwerte / Eigenvektoren / Kegelschnitt

1. **Cramersche Regel** Mitunter (z.B. in ET1) wird die Cramersche Regel, Wiki zur Lösung eines (kleinen) linearen Gleichungssystems verwendet. Dabei wird eine der Unbekannten als Quotient zweiter Determinanten berechnet.

   Wir wollen die Cramersche Regel verstehen und betrachten das Beispiel:

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c} \overset{(*)}{=} \underline{d}, \qquad \underline{a}.\underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$$

   (a) Warum ist die Determinante folgender Matrizen gleich Null?

$$\det\begin{pmatrix}\underline{b} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} = 0 \text{ und } \det\begin{pmatrix}\underline{c} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} = 0$$

   (b) Nutzen Sie die Linearität der Determinante

$$\det\begin{pmatrix}\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} & \ldots\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix}\underline{a} & \ldots\end{pmatrix} + \beta\det\begin{pmatrix}\underline{b} & \ldots\end{pmatrix}$$

   um folgende Determinante durch Verwendung von (*) in die Summe von 3 Determinaten umzuwandeln:

$$\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} = \ldots + \ldots + \ldots \qquad (**)$$

   (c) Stellen Sie (**) unter Verwendung von (a) nach x_1 um.
   Das ist die Cramersche Regel zur Berechnung einer Unbekannten (hier x_1) im linearen Gleichungssystem. Zur Berechnung von x_i muss die 'rechte Seite' (hier $\underline{d}$) anstelle der i-ten Spalte in die Koeffizientenmatrix eingesetzt werden.

   Lösung:

   (a) Der von den Vektoren $\underline{b}, \underline{b}, \underline{c}$ augespannte Spat hat das Volumen Null bzw. die Vektoren sind linear abhängig ...

   (b)

$$\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} = x_1\det\begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} + x_2\underbrace{\det\begin{pmatrix}\underline{b} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}_{=0} + x_3\underbrace{\det\begin{pmatrix}\underline{c} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}_{=0}$$

   (c) $x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}{\det A}$

2. **Weltformel für diagonalisierbare Matrizen:** $A = S\Lambda S^{-1}$
   Betrachtet wird die lineare Abbildung $\underline{y} = A\underline{x}$. Gegeben sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ der Matrix A. Bitte alles Folgende auch skizzieren!

(a) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{v}^1$ des Vektors $\underline{v}^1$ an.

(b) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{x}$ des Vektors $\underline{x} = 1 \cdot \underline{v}^1 + 3 \cdot \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ an.

(c) Geben Sie die Matrix A an.

Lösung:

(a) $A\underline{v}^1 = \lambda_1 \underline{v}^1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Überlagerungsgedanke (= Linearität):

$$A\underline{x} = \lambda_1 \cdot 1\underline{v}^1 + \lambda_2 \cdot 3\underline{v}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) (s. 7.58 VL): $D = \Lambda = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $S = \begin{pmatrix} \underline{v}^1 & \underline{v}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow\ A = S \cdot \underline{\Lambda} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Man kann sich gern noch'mal überzeugen, dass A tatsächlich die vorgegebenen Eigenwerte/Eigenvektoren hat.

3. **LGS - EW/EV - für fortgeschrittene Studenten**

Schreiben Sie die Gleichung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (*)$ als lineares Gleichungssystem in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (**)$$

Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt = 0 ?), dass (*) und damit auch (**) die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (***)$$

hat. Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (***) über den Rang der Koeffizientenmatrix $\underline{M}$ (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?
Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (***) über mindestens einen Eigenwert von $\underline{M}$? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(***) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rang}(M) < 3 & \text{LGS-Denke} \\ \lambda_1 = 0 & \text{EW-Denke} \end{cases}$$

Gemeinsamer Nenner: $\det M = 0 \Leftrightarrow$ Mindestens ein Eigenwert(M) ist gleich Null.

4. **Kegelschnitt Hyperbel**
   Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ (1) wird Hyperbel genannt.
   Bei Kegelschnitten wird jedoch bei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) von einer Hyperbel gesprochen.
   Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!

   (b) Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für x' und y' ein.

   (c) Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix S als Spalten eingetragen:
   $\underline{x}_{\text{alt}} = S \cdot \underline{x}_{\text{neu}}$ (3) (analog $\underline{x} = S\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = S^T\underline{x}$, wenn S orthogonal, s. 7.51 VL.

   (d) Es gilt $\underline{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\underline{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Geben Sie mit Hilfe von (3) x und y als Funktion von x' und y' an.

   (e) Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Geben Sie a und b an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

5. **Kegelschnitt grafisch**
   Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:
   $x^2 - y^2 = 1,\ y^2 - x^2 = 1,\ (x-1)^2 - (y-2)^2 = 1,\ \frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1,\ x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$
   (Asymptote mit zeichnen)

6. **Orthogonale Matrix**
   Geben Sie für die Matrix $\underline{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse $\underline{Q}^{-1}$, ihre Transponierte $\underline{Q}^T$ sowie $\underline{Q}^T \cdot \underline{Q}$ an. Ist $\underline{Q}$ eine orthogonale Matrix , d.h. bilden ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis (ONB) ?

Zusatz: **Kompl. EW - Drehung**

Betrachtet wird die Abbildung $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie das Bild des Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).

(c) Berechnen Sie nun die Eigenwerte der Matrix A.

(d) Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).

(e) Schreiben Sie A als Element von $C = \{aE + bI : a, b \in \mathbb{R}\}$s. 7.12 VL.
Wie hängen a und b mit den Eigenwerten zusammen und wie lautet die zu A gehörige komplexe Zahl z?

Lösung:

(b) Streckung um $\sqrt{5}$, Drehung um $-\arctan(1/2)$.

(c) $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$

(d) $|\lambda| = \sqrt{5}$ =Streckungsfaktor, $\arg(\lambda) = \pm\arctan(1/2) \overset{(*)}{=}$Winkel, um den die (Abbildung durch die) Matrix dreht.

(e) $\lambda_{1,2} = a \pm b\,\mathrm{i}, a = 2, b = 1, z = 2 + \mathrm{i}$

Bemerkung: (*) gilt leider nur, wenn Re und Im der konjugiert komplexen Eigenvektoren zueinander orthogonal sind (das ist hier der Fall). Die ganze Wahrheit ist etwas komplexer - nur etwas ;-).