Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Kurzlösungen zur Vorlesung Mathematik I/2

10. Woche

Implizite Funktionen

Ü2 Aufgabe 18.7.

a) $z_x(4,3) = 1, \quad z_y(4,3) = \frac{3}{4},$

b) $z_x(5,-1) = 0, \quad z_y(5,-1) = -\frac{1}{6},$

c) $z_x(7,4) = \frac{1}{8\ln 2+1}, \quad z_y(4,3) = -\frac{4}{8\ln 2+1}.$

Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingung

Ü2 Aufgabe 18.13.a,c

a) Minimum bei $\begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z(1,1) & = & -5 \end{cases},$

c) Sattelpunkt, $z(0,0) = 0,$

Sattelpunkt, $z(6,0) = 0,$

Sattelpunkt, $z(0,6) = 0,$

(rel.)Minimum bei $z(2,2) = -16.$

Ü2 Aufgabe 18.14.a,g

a) $x = 0, y = 0$ Sattelpkt.

$x = \pm 2, y = 0$ jeweils (rel.) Min. bei $z(\pm 2, 0) = 1001.$

g) relatives Minimum in $P_0(0,0)$ mit $z = 0,$

rel. Maximum in $P_{1,2}(0,\pm 1)$ mit $z = 2\mathrm{e}^{-1},$

Sattelpunkt in $P_{3,4}(\pm 1, 0)$ mit $z = \mathrm{e}^{-1}.$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung

Ü2 Aufgabe 18.19.a

4 kritische Punkte: $x_{1,2} = \pm 3, \quad y_{1,2} = \pm 3, \quad \lambda_{1,2} = -1$ und $x_{3,4} = \pm 1, \quad y_{3,4} = \mp 1, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{9}.$

Ü2 Aufgabe 18.20.c

3 kritische Punkte:
$(x_1, y_1) = (-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ mit $\lambda_{1,2} = 1$ und $(x_3, y_3) = (-1, 0)$ mit $\lambda_3 = 4$.

Ü2 Aufgabe 18.23.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$$

$\Rightarrow$ 4 kritische Punkte: $P_1(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$; $P_2(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$; $P_3(1, -1)$; $P_4(-1, 1)$.

Ü2 Aufgabe 18.25.

<u>Betrachtung im $\mathbb{R}^3$</u>

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z + \lambda_1(4x - 8y - z + 24) + \lambda_2(x^2 + 4y^2 - z)$$

grad $L = \underline{0} \Rightarrow$ 2 kritische Punkte: $x_1 = -2$; $y_1 = 1$; $z_1 = 8$; $\lambda_1 = \lambda_1 = 1/2$ und $x_2 = 6$; $y_2 = -3$; $z_2 = 72$; $\lambda_1 = 3/2$; $\lambda_2 = -1/2$;
<u>*oder*</u>: <u>Betrachtung im $\mathbb{R}^2$</u>: Schnitt Paraboloid/Ebene $\Rightarrow$ z eliminieren

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 + \lambda(-x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 24)$$

grad $L = \underline{0} \Rightarrow$ 2 kritische Punkte: $x_1 = -2$; $y_1 = 1$; $\lambda = 1/2$ und $x_2 = 6$; $y_2 = -3$; $\lambda = 3/2$.