Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

9. Woche – Taylor mehrdimensional, Kettenregel, implizite Funktionen

Taylorformel im Mehrdimensionalen

Ü2 Aufgabe 18.8.

Mit Hilfe der Taylorentwicklung ordne man das Polynom $P(x, y) = 3x^4y - 4y^2 + 2x$ nach Potenzen von $(x + 1)$ und $(y - 3)$. Welche Gleichung ergibt sich für die Tangentialebene an die durch P gegebene Fläche in $A(-1, 3, -29)$?

Ü2 Aufgabe 18.9. a,d

Mit Hilfe der Taylorschen Formel approximiere man die durch $z = f(x, y)$ gegebene Fläche an der Stelle $P(x_0, y_0)$ durch eine Fläche 2. Ordnung.

a) $z = y \ln(y - 3x), \quad P(0; 1)$,
b) $z = x \ln(2x - y), \quad P(1; 1)$,
c) $z = \ln(x^2 + y), \quad P(0; 1)$,
d) $z = \arctan \dfrac{y}{x}, \quad P(1; 1)$,
e) $z = \dfrac{x - 3y^2}{x - 1} + x \tan y, \quad P(2; 0)$,
f) $z = \cos x \cos y, \quad P(0; 0)$,

Jacobi-Matrix und Kettenregel

Ü2 Aufgabe 17.36.

Für die mittelbare Funktion $z = f(x, y)$ mit $x = x(t),\ y = y(t)$ ist $\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ zu berechnen.

a) $z = 3x^2 + 2xy + y^2$ mit $x = \sin t,\ y = \cos t$,

b) $z = \ln[(x + y)xy],\ x = t^2 - 1,\ y = t^2 + 1 \quad (|t| > 1)$,

Ü2 Aufgabe 17.37 b,c

Von der mittelbaren Funktion $z = f(x, y)$ mit $x = x(t),\ y = y(t)$ ist $\dot{z}$ zu ermitteln ($z_x,\ z_y,\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t)$ sollen existieren und stetig sein).

b) $z = \tan xy$, c) $z = x^y$,

Implizite Funktionen

Ü2 Aufgabe 18.1.

Gegeben ist die Gleichung

$$F(x, y) \equiv x^3 + y^3 + xy = 0. \tag{0.1}$$

a) Welche der Punkte $P_1(0; 0)$, $P_2\left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}; -\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{18}}; -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\right)$ genügen der Gleichung (0.1)?

b) Für die in a) ermittelten Punkte untersuche man, ob in einer gewissen Umgebung solch eines Punktes (0.1) eindeutig nach x bzw. nach y auflösbar ist und gebe in diesem Fall die 1. Ableitung der so entstehenden Funktion in diesen Punkten an.

Ü2 Aufgabe 18.2.b

Für die Funktion $y = f(x)$, die durch $F(x, y) = 0$ in impliziter Form gegeben ist, berechne man $y'(x)$. Welchen Wert hat $y'(x)$ speziell in $P_0(x_0; y_0)$?

b) $F(x, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \tan y + \dfrac{y}{x} - 3(x^2 - 1) - \pi, \quad P_0(1; \pi),$

Ü2 Aufgabe 18.4.

Man ermittle die Gleichung der Tangenten an die Kurve

a) $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ im Punkt $P_1(1; -2)$,

b) $1 + y + xy - \mathrm{e}^{x/2} \cos^2 y = 0$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$, wenn dieser auf der Kurve liegt. Was ergibt sich für $P(0; 0)$?