Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

6. Woche – Kurvenintegrale 1. + 2. Art, Wegunabhängigkeit

Kurvenintegrale

Ü2 Aufgabe 22.1. a,g

Man berechne die Bogenlänge folgender Kurven:

a) $x = \mathrm{e}^t \cos t, \quad y = \mathrm{e}^t \sin t, \quad z = \mathrm{e}^t, \quad 0 \le t \le b,$

g) $x = 4 \ln t, \quad y = 2t + \dfrac{2}{t}, \quad 2 \le t \le 4$.

Kurzlösung: a) $\quad l = \sqrt{3}(\mathrm{e}^b - 1), \quad$ b) $\quad l = \dfrac{9}{2}.$

Ü2 Aufgabe 22.2. a,d

Man berechne die Bogenlänge folgender Kurven, wobei (r, φ) ebene Polarkoordinaten bezeichnen:

a) $r = a \exp(\beta\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad a > 0, \quad \beta \neq 0$ (logarithmische Spirale),

d) $r = a(1 + \cos\varphi), \quad a > 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ (Kardioide).

Kurzlösung: a) $\quad l = \dfrac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}(\exp(\beta\varphi_2) - \exp(\beta\varphi_1)), \quad$ b) $\quad l = 8a.$

Zusatz: Ü2 Aufgabe 22.3. a

Für die folgende Kurve sind die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes zu berechnen:

a) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t, a > 0, 0 \le t \le b$.

Nur Ansätze und für $b = 2\pi$ die Lösung (mit Hingucken ;-))
Kurzlösung:

a) **Formeln**: $\boxed{B = \int\limits_{t_a}^{t_e} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \,\mathrm{d}\,t = \int\limits_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \,\mathrm{d}\,t}$ und

$$\boxed{x_s = \frac{1}{B} \int\limits_{t_a}^{t_e} x(t) |\dot{\mathbf{x}}(t)| \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{B} \int\limits_{t_a}^{t_e} x(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \,\mathrm{d}\,t}$$

Für $b = 2\pi$: $\quad x_s = y_s = 0, z_s = \dfrac{h}{2}$ (Schwerpunkt Schraubenlinie)

Vektorielles Kurvenintegral - Wegunabhängigkeit

Ü2 Aufgabe 22.6. a,b

Man berechne die folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int\limits_{(0;0;0)}^{(1;1;1)} [(x+y+z)\,\mathrm{d}\,x + (3x+2y-z)\,\mathrm{d}\,y + (5x-y+z)\,\mathrm{d}\,z]$ längs

$\alpha)$ einer Geraden; $\beta)$ längst eines in $(1;0;0)$ und $(1;1;0)$ gebrochenen Streckenzuges,

b) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;0)} [y^2\,\mathrm{d}\,x - x^2\,\mathrm{d}\,y]$ längs: $\alpha)$ einer Geraden; $\beta)$ des Einheits-Viertel-Kreisbogens,

Kurzlösung:

a) $\alpha)$ $I = 6$, $\beta)$ $I = 9$.

b) $\alpha)$ $I = \dfrac{2}{3}$, $\beta)$ $I = \dfrac{4}{3}$.

Ü2 Aufgabe 22.7. a,b

Aus den folgenden Kurvenintegralen greife man diejenigen heraus, deren Integranden totale Differentiale einer Funktion Φ sind. Man bestimme Φ und berechne hiermit das jeweilige Integral. Die übrigen Kurvenintegrale werte man unmittelbar aus.

a) $\displaystyle\int\limits_{(0;0)}^{(2;4)} [x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y]$ längs $\alpha)$ $y = x^2$; $\beta)$ der geradlinigen Verbindung; $\gamma)$ in $(2;0)$ gebrochenen Streckenzuges.

b) $\displaystyle\int [(x^2+y)\,\mathrm{d}\,x + (x-y^2)\,\mathrm{d}\,y]$ mit dem Integrationsweg

$\alpha)$ $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1$ (mathematisch positiv orientiert und einmal durchlaufen);

$\beta)$ geradlinig von $(1;1;-7)$ nach (a,a,a);

$\gamma)$ $\mathbf{g} = \mathbf{r} = 2\cos(3t)\mathbf{e}_x + 4\sin(3t)\mathbf{e}_y + \pi t\mathbf{e}_z$, $0 \le t \le 2\pi$.

a) $\alpha), \beta), \gamma)$ $I = 10$.

b) $\alpha), \gamma)$ $I = 0$, $\beta)$ $I = a^2 - 1$.