Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

# Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

## 5. Woche – div, grad, rot

### Vektoranalysis

**Ü2 Aufgabe 19.2.**

Für das Vektorfeld $\mathbf{v} = \dfrac{yz}{x}\mathbf{e}_1 + \dfrac{xz}{y}\mathbf{e}_2 + \dfrac{xy}{z}\mathbf{e}_2$, $(x, y, z > 0)$ berechne man

a) $\operatorname{div} \mathbf{v}$, b) $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, c) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$,
d) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}$, e) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$, f) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$

**Kurzlösung:**

a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\left\{\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2}\right\}$

b) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(x\left\{\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{y}\right\}, y\left\{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z}\right\}, z\left\{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right\}\right)^T$

c) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \left[\dfrac{2yz}{x^3} - \left\{\dfrac{z}{y^2} + \dfrac{y}{z^2}\right\},\ \dfrac{2xz}{y^3} - \left\{\dfrac{z}{x^2} + \dfrac{x}{z^2}\right\},\ \dfrac{2xy}{z^3} - \left\{\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}\right\}\right]^T$

d) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ gilt immer !

**Ü2 Aufgabe 19.08.**

Vom Skalarfeld $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $a > b > c > 0$, bestimme man diejenigen Punkte der Niveaufläche $U(x, y, z) = 1$, in denen $\operatorname{grad} U$ extremale Länge besitzt.

Nur 2 Niveauflächen (Ellipsoide) zeichnen (U=1 und U=4) und dann 'hingucken': gleicher Niveausanstieg (4-1=3) auf verschiendenen Längen (a,b,c).
**Lösung:** Wegen $a > b > c$, Gradient minimal in x- und maximal in z-Richtung.

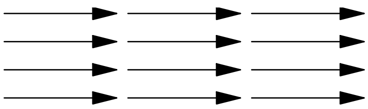
**Ü2 Aufgabe 19.9.**

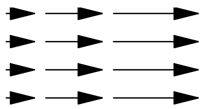
Für das Potential $U = 3r^2 + \frac{1}{r^2}$ ($\mathbf{r} = [x, y, z]^T, r = |\mathbf{r}|$) berechne man die Feldstärke $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$. Für welche Punkte wird $|\mathbf{E}|$ am kleinsten?

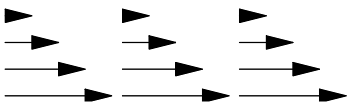
**Kurzlösung:**
Minimale Feldstärke ($|\mathbf{E}| = 0$) auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

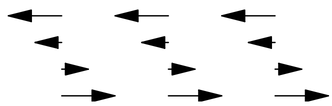
## Ü2 Aufgabe 19.10.

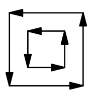
Geben Sie an, ob die ebenen Vektorfelder $\mathbf{a}$ in den nachstehend skizzierten Gebieten Quellen bzw. Wirbel besitzen, und entscheiden Sie dementsprechend, ob jeweils die Divergenz bzw. die Rotation verschwindet oder nicht!

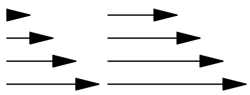
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

**Kurzlösung:**

a) $\mathbf{a} = a(1,0,0)^T, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$

f) $\mathbf{a} = a(xy,0,0)^T, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = ay \neq 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = (0,0,-ax)^T \neq \mathbf{0}$

## Ü2 Aufgabe 19.11.

Welche der Ausdrücke

a) $\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, b) $\mathbf{e}_1 x \times \operatorname{grad}(\mathbf{ab})$, c) $x \times \operatorname{grad}(\mathbf{ab})$,

sind sinnvoll, welche sinnlos? Warum? Berechnen Sie die sinnvollen Ausdrücke für $\mathbf{a} = (z,0,-3)^T$, $\mathbf{b} = (0,xy,0)^T$, $\mathbf{c} = (0,2,-xy)^T$ und $f = f(x,y,z) = x+y+z$!

**Kurzlösung:**

a) $\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = x(z^2+9)$

b) $\mathbf{e}_1 x \times \operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = \mathbf{0} = (0,0,0)^T$

c) Sinnlos, da Vektorprodukt von Zahl $\times$ Vektor nicht erklärt.

**Ü2 Aufgabe 19.12.**

Man begründe, welche der folgenden Ausdrücke erklärt sind, wenn $u = u(x,y,z)$, $t = t(x,y,z)$ Skalarfelder und $\mathbf{v}(x,y,z)$, $\mathbf{w}(x,y,z)$ Vektorfelder sind. (Die benötigten Ableitungen sollen existieren.)

a) $\operatorname{grad}\mathbf{w}$, b) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\operatorname{grad}t)$, c) $\operatorname{div}(u\,\mathbf{v})$, d) $\operatorname{grad}(\operatorname{rot}\mathbf{w}\times\mathbf{v})$,
e) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}\,t)$, f) $(\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{w})\times\operatorname{grad}t$, g) $\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, h) $\operatorname{grad}(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2$,

**Kurzlösung:**

1. $\boxed{\text{grad}}$ nur von <u>Skalarfelder</u> bildbar und ist ein <u>Vektor</u>,
2. $\boxed{\text{rot}}$ nur von <u>Vektorfelder</u> bildbar und ist ein <u>Vektor</u>,
3. $\boxed{\text{div}}$ nur von <u>Vektorfelder</u> bildbar und ist ein <u>Skalar</u> (Zahl).

   a) existiert nicht; b), c) existieren …

**Ü2 Aufgabe 19.16.**

Berechnen Sie mit Hilfe des Nablaoperators $\nabla$ die folgenden Ausdrücke:

a) $\nabla\cdot\mathbf{r}$, b) $\nabla\times\mathbf{r}$, f) $\nabla\frac{1}{r}$ $(r\neq 0)$,

Es bedeuten:
$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, $r = |\mathbf{r}|$, $\nabla = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}$ und $\mathbf{a}$ einen konstanten Vektor.
Geben Sie an, ob es sich bei den angeführten Operationen jeweils um die Operation grad, rot oder div handelt!

**Kurzlösung:**

a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = \operatorname{div}\mathbf{r}$

b) $\nabla\times\mathbf{r} = \operatorname{rot}\mathbf{r}$

f) $\nabla\frac{1}{r} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$

**Ü2 Aufgabe 19.17.**

Durch $\mathbf{v} = 4(r^2 - x^2 - y^2)\mathbf{e}_3$ ist das Geschwindigkeitsfeld einer laminaren Rohrströmung gegeben (Rohrachse ist die $z$-Achse, Rohrdurchmesser ist $2r$). Zeigen Sie, dass die Strömung quellenfrei, aber nicht wirbelfrei ist.

**Kurzlösung:** quellenfrei, nicht wirbelfrei.

**Ü2 Aufgabe 19.18.**

Das Magnetfeld eines in Richtung $\mathbf{e}_3$ verlaufenden gradlinigen unendlich dünnen Stromfadens wird durch

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{e}_1 + \frac{I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{e}_2 \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

beschrieben. Berechnen Sie rot $\mathbf{H}$ und div $\mathbf{H}$.

**Kurzlösung:**
rot $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. div $\mathbf{H} = 0$.

**Ü2 Aufgabe 19.19.**

Ermitteln Sie für das Vektorfeld

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

(elektrisches Feld der in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ konzentrierten Ladung $Q$) rot $\mathbf{E}$ und div $\mathbf{E}$.

**Kurzlösung:**
rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, div $\mathbf{E} = 0$.