Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

4. Woche – Normalbereiche und Bereichsintegrale, krummlinige Koordinaten

Integralbereiche und Bereichsintegrale

Ü2 Aufgabe 20.8.

Die folgenden Doppelintegrale sind zu berechnen, und der Integrationsbereich soll skizziert werden:

e) $\displaystyle\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{y+1} x\ln y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$

Ü2 Aufgabe 20.9.

Man skizziere den Integrationsbereich und vertausche die Integrationsreihenfolge ($f(P)$ sei stetig):

c) $\displaystyle\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(P)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} f(P)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x,$

Ü2 Aufgabe 20.10.

Skizzieren Sie den Bereich $\mathcal{B}$, und berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,b$ für:

c) $f(x,y) = x + y^2$, $\quad\mathcal{B}$ wird durch $x = \dfrac{y^2}{4}$ und $y = 2x - 12$ begrenzt.

Ü2 Aufgabe 20.12.

Man skizziere den Grundriss des gegebenen Körpers in einer geeigneten Koordinatenebene und berechne das Volumen des Körpers, wenn er begrenzt wird von

d) der x, y-Ebene, den Ebenen $x + y = 2$, $y + 2 = z$ und der Fläche $y^2 = x$,

h) der Ebene $z = 0$, den Flächen $z = x^2 + 3$, $x^2 + y^2 = 2$ und $x^2 + y^2 = 4$.

Ü2 Aufgabe 20.17.

Berechnen Sie für den auf der Ebene $z = 0$ durch die Kurven $x = y^2$ und $x = 3 - 2y^2$ begrenzten Bereich, der mit der Dichte $\rho = \rho(x,y) = xy^2$ belegt ist, mit Hilfe von Bereichsintegralen

a) die Fläche, b) die Masse, c) den Schwerpunkt.

Ü2 Aufgabe 21.03.

21.3. Welches Volumen hat der Körper, der von den folgenden Flächen begrenzt wird?

a) $x = 0, \quad x = 2\pi, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = y, \quad z = y^3,$

b) $x = 0, \quad y = 0, \quad y = x + 1, \quad z = -xy - 1, \quad z = x^2 + y^2 + 1.$

krummlinige Koordinaten: elliptisch, Zylinder, Kugel

Ü2 Aufgabe 20.19.

Auf der Ellipsenfläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ist die Flächendichte durch $\rho(x, y) = \rho_1 + \rho_2 \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)^2$ gegeben, ρ_1, ρ_2 =const. Wie groß ist die Gesamtmasse?

Ü2 Aufgabe 21.14.

Man bestimme die Masse desjenigen Körpers, der von den Flächen $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ und $x - y - z = 0$ mit $z \geq 0$ begrenzt wird. Für die Dichte gelte $\rho(x, y, z) = 3(x^2 + y^2)z$.

Ü2 Aufgabe 21.17.

Berechnen Sie die Gesamtladung Q des Körpers, der durch die Flächen $z = \sqrt{3}(x^2 + y^2)$ und $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ begrenzt wird, wenn die Ladungsdichte mit $\rho = \rho(x, y, z) = \rho_0 z$ angegeben wird. Fertigen Sie eine Skizze des Bereiches an !

Ü2 Aufgabe 21.18.

Ein homogener Körper K werde durch die Zylinder $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, den Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und die Ebene $z = -2$ begrenzt. Die Koordinaten des Schwerpunktes von K sind gesucht.

Ü2 Aufgabe 21.22.

Welche Punktmenge M - beschrieben in Kugelkoordinaten - wird durch $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ $(0 < \theta_0 \leq \pi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ im $\mathbb{R}^3$ beschrieben ? Man gebe die Schwerpunktkoordinaten von M im Fall $\rho = const$ an und behandle speziell $\theta_0 = \pi/2$ und $\theta_0 = \pi$.