Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

3. Woche – Partielle Ableitungen, Gradient, Tangentialebene, Fehlerrechnung

Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung

Ü2 Aufgabe 17.12.

Für die folgenden Funktionen sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung allgemein und an der Stelle $(x_0; y_0)$ zu ermitteln:

a) $z = \sqrt{2x + 3xy + 4y}$, $(x_0; y_0) = (1; 1)$,

b) $z = \cos(\mathrm{e}^{xy} + xy)$, $(x_0; y_0) = (0; 1)$,

c) $z = x^{2y}$, $(x_0; y_0) = (2; 1)$,

d) $z = \ln(2 - \mathrm{e}^{x-y})$, $(x_0; y_0) = (0; 0)$,

e) $z = \ln \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x_0; y_0) = (4; 3)$,

Ü2 Aufgabe 17.15.

Von der Funktion $z = f(x, y)$ sind alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung zu bilden.

a) $z = \sin(ax + by)$,

b) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$,

c) $z = x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$,

d) $z = \ln(x^2 + y)$,

e) $z = xy \arcsin x$,

f) $z = x + y - |x - y|$,

g) $z = y \ln \dfrac{x}{y} - \tan y + \dfrac{x - 3y}{x - 1}$,

h) $z = y^x + x^y$.

Ü2 Aufgabe 17.16.

Ist die Funktion $z = x * \exp\left(-\dfrac{y}{x}\right)$ Lösung der Differentialgleichung

$$x\, z_{xy} + 2(z_x + z_y) \quad = \quad y\, z_{yy}?$$

Gradient

Ü2 Aufgabe 19.3.

Man berechne folgende Feldfunktionen:

a) $\operatorname{grad} U$ für $U = (x^2 - y^2)z + \mathrm{e}^{xyz}$,

b) $\operatorname{div} \mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = x^2y^2z^2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$,

c) $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = \arctan(xy)[\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2] - \mathbf{e}_3$,

d) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = (xz; yz; xy\,\mathrm{e}^z)^T$,

e) $\operatorname{div} \mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = \left(\ln^3[yz^2];\ \mathrm{e}^{\cos x};\ \frac{1}{3}yz^3\right)^T$,

Ü2 Aufgabe 19.4.a,b,c,e

Für das Skalarfeld $U = U(x,y,z)$ berechne man grad U (es sei $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, $|\mathbf{r}| = r$, $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor) und bestimme in a) bis l) die Gestalt der Niveauflächen, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{r} \neq \mathbf{a}$.

a) $U = 2x + 5y - 6z$, b) $U = \mathbf{a}\,\mathbf{r}$, c) $U = r$, e) $U = \frac{1}{r}$,

Ü2 Aufgabe 19.6.

Von dem Skalarfeld $U(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$ bestimme man im Punkt $P(1;2;1)$

a) grad U, b) $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}}$ für $\mathbf{a} = (1;2;3)^T$,

c) $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ in Richtung grad U.

Tangentialebene

Ü2 Aufgabe 17.23.

17.23. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die durch $z = f(x,y)$ gegebene Fläche im Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

a) $z = x^2 + y^2$,

b) $z = x^2 + 4xy - 2y^2$ **mit** $P_0(2; 1; z_0)$,

Ü2 Aufgabe 18.12.

Gegeben ist die Fläche mit der Gleichung

$$z = 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + C.$$

Wie muss die konstante C gewählt werden, damit diese Fläche die x,y-Ebene berührt?

Fehlerrechnung

Ü2 Aufgabe 17.29.

Zwei Widerstände sind parallelgeschaltet. Für den Ersatzwiderstand gilt $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Man berechne den größtmöglichen absoluten und relativen Fehler des Ersatzwiderstandes, wenn $R_1 = (450 \pm 2)\Omega$ und $R_2 = (150 \pm 1)\Omega$ gemessen wurden!

Ü2 Aufgabe 17.30.

Zur Bestimmung der Brennweite f eines Kugelspiegels wurden Gegenstandsweite $a = (12 \pm 0.1)$cm und Bildweite $b = (5 \pm 0.05)$cm gemessen. Welcher absolute und welcher relative Fehler ergibt sich für die gemäß $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ berechnete Brennweite?