Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

2. Woche – Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Denken in 3D – Schnittlinien

Ü2 Aufgabe 17.1.

Gesucht sind alle Punkte $P(x;y;z)$ des $\mathbb{R}^3$, für welche gilt:

a) $y = 14$,
b) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 0$,
c) $zx = 1$,
d) $z + y = 0$,
e) $(x+5)^2 + z^2 = 8$,
f) $|x| + |y| + |z| = 1$,
g) $19 + \sqrt{(x-6)^2 + y^2 - 81} \geq 0$,
h) $\max\{x^2, y^2, z^2\} \leq 4$.

(Geometrische Interpretation!)

Ü2 Aufgabe 17.2.

Skizzieren Sie die folgenden Flächen! Überlegen Sie vorher, welche Kurven sich ergeben, wenn die Flächen mit Ebenen $x =$const, $y =$const, $z =$const geschnitten werden.

a) $x^2 + z^2 = 9$,
b) $z^2 + 9x^2 + 4y^2 = 1$,
c) $y^2 = x^2 + z^2$,
d) $z^2 - 4x^2 + y^2 = 1$,
e) $z^2 = x^2 + y^2 + 1$,
f) $z = x^2 + 1 - y^2$,

Ü2 Aufgabe 17.3.

Von der Funktion $z = f(x,y)$ sind die Niveaulinien zu bestimmen. von der in der x,y-Ebene skizzierten zugehörigen „Karte der Fläche“ schließe man auf die Gestalt der durch f bestimmten Fläche F im $\mathbb{R}^3$.

a) $z = x - 6$,
b) $z = \sqrt{1-y^2}, |y| \leq 1$,
c) $z = x^2 - y^2 + 4$,
d) $z = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
e) $z = x^2 + (y+2)^2 - 4$,
f) $z = (x+1)(y-3)$,
g) $z = 3 - 4x^2 - 9y^2$,

Ü2 Aufgabe 17.6.

Skizzieren Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von $z = f(x,y)$!

a) $z = \ln(x^2 - y^2)$,
b) $z = \sqrt{x^2 + 3y^2 - 9} - \dfrac{1}{xy}$,
c) $z = \dfrac{\ln(y-x)}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$,
e) $z = \arcsin(5 - 2y + 2x)$,

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Ü2 Aufgabe 17.7.

Man bestimme $\lim\limits_{P\to(0,0)} f(x,y)$, wenn sich P längs

α) der x-Achse; β) der y-Achse; γ) der Geraden $y = t\,x$, t =const, bewegt.

Läßt sich aus den erhaltenen Ergebnissen etwas über die Existenz von $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ folgern?

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, b) $f(x,y) = \dfrac{y^2 \sin 2x}{x^2+4}$,

c) $f(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$.

Ü2 Aufgabe 17.8.

Die folgenden Grenzwerte sind - falls sie existieren - zu berechnen.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin 8xy}{2xy}$, d) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{x-3}{x-y}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$,

Ü2 Aufgabe 17.9.

Welche der Funktionen $z = f(x,y)$ sind im Ursprung stetig?

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,