Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz, Dr. Ute Feldmann

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik I/2

1. Woche – Priorität Aufgaben 3/5.4.3 und 3/5.3.3

Determinanten

Ü3 Aufgabe 1.2.3

Unter Ausnutzung von bestimmten Eigenschaften der Determinanten berechne man die folgenden Determinanten möglichst einfach:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{e)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -8 & -6 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Eigenwerte - Eigenvektoren

Ü3 Aufgabe 1.2.4

Man bestimmten alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 3 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Ü3 Aufgabe 5.4.3

Von den folgenden Matrizen bestimme man die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Ein „maximales System“ erhält man, wenn man zu jedem Eigenwert ein System von $d = n - r$ linear unabhängigen Eigenvektoren bestimmt. (Siehe Band 13, Satz 5.5))

Ü3 Aufgabe 5.4.4

Von den folgenden Matrizen bestimme man die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ü3 Aufgabe 5.4.5

Man ermittle die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger normierter Eigenvektoren von folgenden symmetrischen Matrizen:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Quadratische Formen - Positiv Definit

Ü3 Aufgabe 5.3.1

5.3.1. Vorgegeben seien die symmetrischen Matrizen

$$a) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad f) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad g) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

untersuche man, welche der zu den obigen Matrizen C gehörigen quadratischen Formen $x^T C x$ positiv definit sind.

Bitte per $EW > 0$ lösen (s. 7.60 (VL)).

Ü3 Aufgabe 5.3.3

5.3.3. Welche der folgenden quadratischen Formen $Q(x_1, x_2, x_3)$ sind positiv definit?

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, **b)** $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, **c)** $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$,

d) $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3$, **e)** $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2$.

Welche Flächen werden durch $Q(x_1, x_2, x_3) = -1$ beschrieben?

Hauptachsentransformation

Ü3 Aufgabe 5.4.10

Man bestimme eine Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}$, die die quadratische Form $\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{C}\mathbf{x}$ in ihre metrische Normalform überführt (Hauptachsentransformation). Als Matrizen $\mathbf{C}$ verwende man die symmetrischen Matrizen der Aufgabe 5.4.5.

Hinweis: $\mathbf{R}$ hieß in der VL $\mathbf{Q}$ (7.61), bzw. $\mathbf{S}$ (7.52) ;-)

Ü3 Aufgabe 5.4.11

Die folgenden Kegelschnittsgleichungen bringe man durch eine geeignete Transformation auf eine Form, in der alle gemischt-quadratischen Glieder fehlen. Um welchen Kegelschnitt handelt es sich?

a) $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 - 288 = 0,$

b) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 130x + 90y + 175 = 0,$

c) $5x^2 - 6xy - 3y^2 + 2x + 18y - 43 = 0.$