Institut für Wissenschaftliches Rechnen

Mathematik I/2
Anwendungsaufgaben Differentialgleichungen 1

(A1) Ein Gefäß enthält V cm^3 einer Lösung eines bestimmten Stoffes der Menge m_0. Ab einem Zeitpunkt $t = 0$ fließen in das Gefäß je Sekunde q cm^3 Wasser und werden sofort gleichmäßig mit der Lösung vermischt. Zugleich fließen aus einem Abfluss ständig je Sekunde q cm^3 der Lösung heraus. Leiten Sie die Differentialgleichung her, die die zeitliche Änderung der Stoffmenge $m(t)$ des im Gefäß verbliebenen gelösten Stoffes beschreibt.

(A2) Ein kegelförmiger Trichter mit Öffnungswinkel 90° ist zur Zeit $t = 0$ mit 1 Liter Wasser gefüllt. Die Ausflussgeschwindigkeit $\frac{dV}{dt}$ (V... Volumen) sei dem Wasserdruck p an der Öffnung proportional und habe zur Zeit $t = 0$ den Wert $-1\frac{\text{cm}^3}{s}$.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für das Volumen $V(t)$ des verbliebenen Wassers auf.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung.

(c) Wann ist der Trichter leer?

Hinweis: Volumen eines Kegels $V = \frac{\pi}{3}hr^2$

(A3) Welche Differentialgleichung ergibt sich für den freien Fall mit Luftwiderstand (zurückgelegter Weg $x(t)$), wenn angenommen wird, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $v(t)$ ist? Bekannt sei dabei die Grenzgeschwindigkeit v_g, die sich nach unendlich langem Fall einstellen würde.
Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz von Newton für die wirkenden Kräfte.

(A4) Betrachtet werde die Differentialgleichung des logistischen Wachstums (logistisches Populationsmodell)

$$\dot{x} = \lambda\left(1 - \frac{x}{N}\right)x$$

mit Parametern λ (Wachstumsrate) und N (eine Art 'Kapazität des Lebensraums').

(a) Berechnen Sie alle stationären Lösungen der Differentialgleichung, d.h. solche Lösungen, für die $\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Skizzieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen $x(t) = x(t, x_0)$ für verschiedene Startwerte $x(0) = x_0$ im x-t-Diagramm (Werte x_0 oberhalb, zwischen und unterhalb der stationären Lösungen wählen) ohne die Lösungen explizit zu berechnen. Nutzen Sie, dass $\dot{x}(t)$ den Anstieg der Lösung zum Zeitpunkt t angibt.

(c) Für Startwerte aus welchen Intervallen verringert sich die Population mit der Zeit, für welche wächst sie an? Wohin konvergieren die unterschiedlichen Lösungen für $t \to \infty$?