

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einiger Lösungen)

15. Woche – Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Rang

1. **Matrizen: Dimension und Produkt** In dieser Aufgabe geht es um Know-How, was Sie im Fach Systemtheorie (3.+4. Semester) benötigen werden.

(a) Sie sehen zwei Gleichungen: eine vektoriell die andere skalar.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + B \cdot x$$
$$y = C \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + D \cdot x \quad \text{mit } x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die (einzig sinnvollen) Dimensionen der Matrizen A, B, C, D an.

(b) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (2 \quad -3), D = 1$$

Geben Sie die Matrizen $sE - A$ und $(sE - A)^{-1}$ an; dabei ist E die Einheitsmatrix und s eine komplexe Variable (die Sie nicht stört :-)).

Berechnen Sie nun $C(sE - A)^{-1}B + D$.

Hinweis: Vektoren sind auch nur Matrizen und werden genauso multipliziert, s. Bem. 7.13, [VL 7.3](#).

Bemerkung: Im Jahrgang 2018 hatten ca. 90% der Studenten in einem Kurztest in Systemtheorie Schwierigkeiten mit den hier benötigten Matrizenoperationen (Matrix $\cdot$ Vektor ...). Wir hoffen, dass es Ihnen nicht so gehen wird!

Lösung:

(a) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, D \in \mathbb{R}$.

(b)

$$sE - A = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, (sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C(sE - A)^{-1}B + D &= (2 \quad -3) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= (2 \quad -3) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ s+1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{-3(s+1)}{(s+1)(s+2)} + 1 = \frac{s-1}{s+2} \end{aligned}$$

2. LGS im $\mathbb{R}^2$

Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 3 & a & b \end{array}\right)$$

Geben Sie entsprechend Satz 7.23 (VL 7.4) Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, so dass das zugehörige lineare Gleichungssystem

- (a) genau eine Lösung hat,
- (b) keine Lösung hat bzw.
- (c) unendlich viele Lösungen hat.

Veranschaulichen Sie die Situation in (b) und (c) graphisch, indem Sie die durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden $g_1 : 2x + 4y = 1, g_2 : 3x + \dots$ zeichnen.

Lösung:

- (a) $a \neq 6$ (b egal),
- (b) $a = 6, b \neq 3/2$: beide Geraden parallel,
- (c) $a = 6, b = 3/2$: beide Geraden sind identisch.

3. Rang der transponierten Matrix

Bestimmen Sie den Rang der transponierten Koeffizientenmatrix A^T aus Beispiel 7.20 (VL 7.4) durch Überführung in Zeilenstufenform.

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A^T) = 2$$

Bemerkung: Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist **immer gleich** der Anzahl linear unabhängiger Spalten - daher das 'oder' in der Rang-Definition 7.21 (VL 7.4).

4. $\Leftrightarrow$ oder $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$

Gegeben sind die fünf Aussagen:

- (a) 'Die Matrix A ist regulär.'
- (b) 'Die Matrix A ist invertierbar.'
- (c) ' $\det A \neq 0$.'
- (d) 'Die Zeilen der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'
- (e) 'Die Spalten der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

Setzen Sie zwischen diese Aussagen die richtigen Verknüpfungen:

$$a \dots b \dots c \dots d \dots e$$

Lösung:

$$a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow e$$

5. **Kindergartenrätsel**

Sie kennen vielleicht schon dieses Rätsel für Kindergartenkinder: [Rätsel](#).

Sie können es mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems lösen: Das Kindergartenkind zählt nämlich einfach nur gewisse 'Bedeutungen' der Ziffern. Die 1. Zeile $9313 = 1$ liest sich also: 'Bedeutung von 9 + Bedeutung von 3 + Bedeutung von 1 + Bedeutung von 3 = 1'. Sei $\underline{x} = (x_0 \dots x_9)$ der Vektor der unbekannten Bedeutungen der Ziffern 0 bis 9, dann wird das Problem durch das lineare Gleichungssystem mit

folgender erweiterten Koeffizientenmatrix beschrieben:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Schönerweise ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 9$.

- (a) Geben Sie die Dimension der homogenen Lösung $\underline{x}_h$ an.
- (b) Sie können an der Koeffizientenmatrix A die homogene Lösung sehen: welches x_i (die Bedeutung welcher Ziffer) ist durch dieses Gleichungssystem beliebig (nicht bestimmt)?
- (c) Sie können die Lösung z.B. mit diesem [Matlab-Skript](#) mit [Zutat](#) ermitteln oder weiter rätseln ;-)

Lösung:

- (a) Die homogene Lösung $\underline{x}_h$ ist $n - \text{Rang}(A|b) = 10 - 9 = 1$ -dimensional.
- (b) Die 5. Spalte der Koeffizientenmatrix A ist $\underline{0} \Rightarrow x_4$ (die 'Bedeutung' der Ziffer 4, die kam gar nicht vor) ist durch dieses Gleichungssystem nicht bestimmt $\Rightarrow \underline{x}_h = t \cdot \underline{e}^5$.
- (c)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	0	0	0	0	0	1	0	2	1