Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

15. Woche – Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Rang

1. **Matrizen: Dimension und Produkt** In dieser Aufgabe geht es um Know-How, was Sie im Fach Systemtheorie (3.+4. Semester) benötigen werden.

   (a) Sie sehen zwei Gleichungen: eine vektoriell die andere skalar.

   $$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + B \cdot x$$
   $$y = C \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + D \cdot x \qquad \text{mit } x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

   Geben Sie die (einzig sinnvollen) Dimensionen der Martizen A, B, C, D an.

   (b) Gegeben sind folgende Matrizen:

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}, \ D = 1$$

   Geben Sie die Matrizen $sE - A$ und $(sE - A)^{-1}$ an; dabei ist E die Einheitsmatrix und s eine komplexe Variable (die Sie nicht stört :-)).
   Berechnen Sie nun $C(sE - A)^{-1}B + D$.
   Hinweis: Vektoren sind auch nur Matrizen und werden genauso multipliziert, s. Bem. 7.13, VL 7_3.
   Bemerkung: Im Jahrgang 2018 hatten ca. 90% der Studenten in einem Kurztest in Systemtheorie Schwierigkeiten mit den hier benötigten Matrizenoperationen (Matrix · Vektor . . .). Wir hoffen, dass es Ihnen nicht so gehen wird!

2. **LGS im $\mathbb{R}^2$**

   Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 3 & a & b \end{array}\right)$$

   Geben Sie entsprechend Satz 7.23 (VL 7_4) Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, so dass das zugehörige lineare Gleichungssystem

   (a) genau eine Lösung hat,

   (b) keine Lösung hat bzw.

   (c) unendlich viele Lösungen hat.

   Veranschaulichen Sie die Situation in (b) und (c) graphisch, indem Sie die durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden $g_1 : 2x + 4y = 1, g_2 : 3x + \ldots$ zeichnen.

3. **Rang der transponierten Matrix**
   Bestimmen Sie den Rang der transponierten Koeffizientenmatrix A^T aus Beispiel 7.20 (VL 7_4) durch Überführung in Zeilenstufenform.

   Bemerkung: Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist **immer gleich** der Anzahl linear unabhängiger Spalten - daher das 'oder' in der Rang-Definition 7.21 (VL 7_4).

4. **$\Leftrightarrow$ oder $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$**
   Gegeben sind die fünf Aussagen:

   (a) 'Die Matrix A ist regulär.'

   (b) 'Die Matrix A ist invertierbar.'

   (c) '$\det A \neq 0$.'

   (d) 'Die Zeilen der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

   (e) 'Die Spalten der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

   Setzen Sie zwischen diese Aussagen die richtigen Verknüpfungen:

$$a \dots b \dots c \dots d \dots e$$

5. **Kindergartenrätsel**

Sie kennen vielleicht schon dieses Rätsel für Kindergartenkinder: Rätsel.

Sie können es mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems lösen: Das Kindergartenkind zählt nämlich einfach nur gewisse 'Bedeutungen' der Ziffern. Die 1. Zeile $9313 = 1$ liest sich also: 'Bedeutung von 9 + Bedeutung von 3 + Bedeutung von 1 + Bedeutung von 3 = 1'. Sei $\underline{x} = (x_0 \ldots x_9)$ der Vektor der unbekannten Bedeutungen der Ziffern 0 bis 9, dann wird das Problem durch das lineare Gleichungssystem mit folgender erweiterten Koeffizientenmatrix beschrieben:

$$(A\,|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

Schönerweise ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 9$.

(a) Geben Sie die Dimension der homogenen Lösung $\underline{x}_h$ an.

(b) Sie können an der Koeffizientenmatrix A die homogene Lösung sehen: welches x_i (die Bedeutung welcher Ziffer) ist durch dieses Gleichungssystem beliebig (nicht bestimmt)?

(c) Sie können die Lösung z.B. mit diesem Matlab-Skript mit Zutat ermitteln oder weiter rätseln ;-)