

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einiger Lösungen)

13. Woche – Vektorraum

1. Basis - linear unabhängig

Ordnen Sie die Worte 'mindestens', 'höchstens' oder 'genau' folgenden Aussagen zu:

Lösung:

Eine Menge von Vektoren, die

- (a) eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist, hat **genau** n Vektoren.
- (b) (im $\mathbb{R}^n$) **linear unabhängig** ist, hat **höchstens** n Vektoren.

2. Geben Sie Dimension und eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 3, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ an. Was ist der Nullvektor?

Lösung:

$$\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4,$$

$$\text{Basis: } \underline{v}^1 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1, \underline{v}^2 = x, \underline{v}^3 = x^2, \underline{v}^4 = x^3, \underline{0} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

3. Die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinaten α_1, α_2 des Vektors $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis (allgemein).

Veranschaulichen Sie die Situation konkret für $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ grafisch.

Lösung

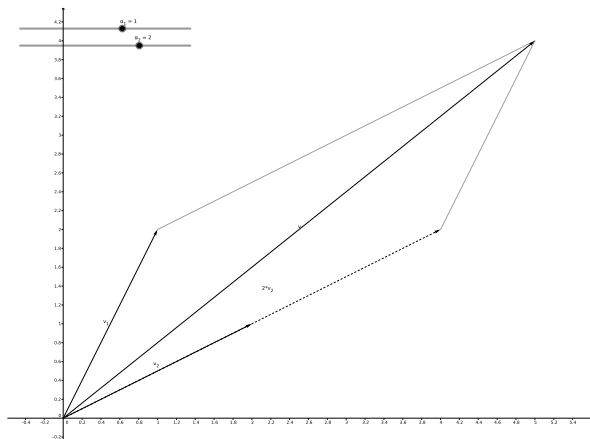
$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc|c} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & \cdot(-1) & \cdot(2) \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & \cdot(2) & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\alpha_1 \text{ eliminiert: } \rightarrow 2x - y = (2 - 2)\alpha_1 + (4 - 1)\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{2x - y}{3}$$

$$\alpha_2 \text{ eliminiert: } \rightarrow 2y - x = (4 - 1)\alpha_1 + (2 - 2)\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = \frac{2y - x}{3}$$

$$\text{für } x = 5, y = 4 \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$$



Zusatz: Gegeben ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen (an die Koeffizienten a, b, c) ist diese Abbildung ein (evtl. nicht-euklidisches) Skalarprodukt, s. [F6_2](#)?

Lösung

- Symmetrie: mit 'Hingucken' ✓
- Additivität: mit 'Hingucken' ✓
- Homogenität: mit 'Hingucken' ✓
- Positiv definit: $f(\underline{x}, \underline{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \stackrel{!}{>} 0$ (*) für $\underline{x} \neq 0$:
Wie man leicht sieht, sind notwendige Bedingungen $a, c > 0$ (sonst wäre (*) schon mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $= \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nicht erfüllt).
(*) $\cdot a$ liefert:

$$a^2x_1^2 + 2abx_1x_2 + acx_2^2 > 0 \tag{0.1}$$

$$\Leftrightarrow (ax_1 + bx_2)^2 + (ac - b^2)x_2^2 > 0 \quad | \text{quadratische Ergänzung} \tag{0.2}$$

$$\Leftrightarrow (ac - b^2) > 0 \tag{0.3}$$

f ist ein Skalarprodukt genau dann, wenn $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$.

Bemerkung Sie werden später genau diese Bedingungen $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$ für die positive Definitheit von Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ kennen lernen. Freuen Sie sich auf quadratische Formen ...