Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

13. Woche – Vektorraum

1. **Basis - linear unabhängig**
   Ordnen Sie die Worte 'mindestens', 'höchstens' oder 'genau' folgenden Aussagen zu: Eine Menge von Vektoren, die

   (a) eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist, hat n Vektoren.

   (b) (im $\mathbb{R}^n$) **linear unabhängig** ist, hat n Vektoren.

2. Geben Sie Dimension und eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 3, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ an. Was ist der Nullvektor?

3. Die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinaten α_1, α_2 des Vektors $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis (allgemein).

   Veranschaulichen Sie die Situation konkret für $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ grafisch.

   Kurzlösung:
   Allgemein: $\alpha_1 = \frac{2y-x}{3}, \alpha_2 = \frac{2x-y}{3}$
   Konkret für: $x = 5, y = 4 \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$.

Zusatz: Gegeben ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen (an die Koeffizienten a, b, c) ist diese Abbildung ein (evtl. nicht-euklidisches) Skalarprodukt, s. F6_2?