Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einiger Lösungen)
12. Woche – vorausschauendes Denken beim Integrieren

1. **Ableitung/Stammfunktion von Potenzfunktionen**
   Potenzfunktionen sind beim Integrieren/Differenzieren unkritisch (gehen auch wieder in Potenzfunktionen über). Machen Sie sich die einzige Ausnahme klar: welche Potenzfunktion führt beim Integrieren aus den Potenzfunktionen heraus?
   Angenommen Sie integrieren über ein Produkt aus einer Potenzfunktion und $\ln(x)$. Durch welche Wahl ($\ln(x) = u$ oder $\ln(x) = v'$) werden Sie bei der partiellen Integration $\ln(x)$ geschickt los?

   Lösung: $\ln(x) = u \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

2. **Überblick Funktionen und ihre Ableitungen**
   Sie lernen, dass man sich durch part. Integration vor einem 'unangenehmen' Produkt von Funktionen drücken kann, in dem man statt dessen das Integral über ein 'angenehmeres' Produkt von Funktionen berechnet.
   Bei der Integration durch Substitution handelt man sich die Ableitung der Substitutionsvariable als Faktor im Integranden ein.
   In beiden Fällen ist es nützlich, sozusagen vorausschauend im Kopf zu haben, wie die Ableitungen prinzipiell aussehen ($\frac{1}{x^2+\ldots}$ oder $\frac{1}{\sqrt{x^2+\ldots}}$). Verschaffen Sie sich durch Blick auf die Liste der Grund-Integrale und -Ableitungen einen Überblick, welche Funktionen eine Ableitung dieser Form haben.

3. **Uneigentliche Integrale - welche existieren?**
   Fertigen Sie sich aus der VL 5_4 eine Übersicht an, welche Integrale bei Integration 'über den Pol' und bei Integration 'bis $\pm\infty$' existieren.
   Entscheiden Sie für
   $$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}\,x, \quad n \in \mathbb{R}$$
   für welche n das uneigentliche Integral bei Integration 'über den Pol' und bei Integration 'bis $\pm\infty$' existiert.

   Lösung:
   $$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}\,x \text{ existiert für Integration } \begin{cases} \text{über den Pol,} & \text{wenn } n < 1 \\ \text{bis } \pm\infty, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

4. **Integration von Partialbrüchen**
   Laut F5_3 gibt es im Ergebnis der Partialbruchzerlegung Terme mit **1.** einfachen und **2.** mehrfachen reellen Polen sowie mit **3.** einfachen (und **4.** mehrfachen, s. F3_3) Paaren konjugiert komplexer Pole.
   Ziehen Sie eine Konsequenz aus Aufgabe 3:

(a) Bei welchen Partialbrüchen ist der Integrationsbereich unkritisch?

(b) Bei welchen Partialbrüchen macht es einen Unterschied, ob 'über den Pol' bzw. bis '$\pm\infty$' integriert wird?

(c) Bei welchen Partialbrüchen geht beides nicht?

Lösung: (a) **3.** (und **4.**) im Fall $\frac{A}{x^2+a^2}$, (b) **2.**,**3.** (und **4.**) im Fall $\frac{Ax+B}{x^2+a^2}$, (c) **1.**

5. **Stammfunktionen von Partialbrüchen mit kompl. Polstellen**
Vollziehen Sie die Punkte 3) und 4) aus VL 5_3 nach.
Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ (Tabelle nachgucken!)

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(x/a)^2}\,\mathrm{d}\,x = \ldots$ (Substitution $t = x/a$!)

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+q-(p/2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \ldots$ ((b) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der Liste der Grundintegrale Nr. 11.

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x$ (Augen auf: Zähler ist Ableitung des Nenners)

(e) $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x$ ((d) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der Liste der Grundintegrale Nr. 10.
Und nun konkret:

(f) $\displaystyle I = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle I = \int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle I = \int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:
(f) $I = \ln(|x^2+6x+10|)+C$,
(g) $I = \arctan(x+3)+C$
(h) $I = x - \arctan(x)+C$