

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

8. Woche – Konvergenzkriterien von Reihen, Stetigkeit von Funktionen

Konvergenzkriterien von Reihen

- A1** Machen Sie sich klar, welche der Konvergenzkriterien für Reihen, s. [VL 3.7](#) zum Nachweis von Konvergenz, von Divergenz oder zum Nachweis von Beidem geeignet sind.

Lösung:

Kriterium	Konvergenz	Divergenz
Cauchy-Kriterium	+	+
notwendiges Kriterium	-	+
Leibniz-Kriterium	+	-
Majorantenkriterium	+	-
Minorantenkriterium	-	+
Quotientenkriterium	+	+
Wurzelkriterium	+	+

Stetigkeit von Funktionen

- A2** In [VL 3.7](#) ist eine Funktion f als im Punkt x_0 **stetig** definiert, wenn für sie folgende Aussage, a , wahr ist:

$$a = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f: (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Geben Sie die Negation (quasi eine Definition für 'in x_0 **unstetig**') an!

Lösung:

$$\bar{a} = \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D_f: \overline{(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

Mit $a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$ und der de Morganschen Regel $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ und mit $\overline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} = |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ folgt:

$$\bar{a} = \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}: (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Veranschaulichung: Eine Funktion mit Sprung in x_0 und $\varepsilon =$ 'halbe Sprunghöhe'.

- A3** Welche (in ihrem Definitionsbereich) stetigen Funktionen kennen Sie?

Kennen Sie überhaupt irgendwelche unstetigen Funktionen?

Lösung: Alle elementaren Funktionen und deren Verkettung sind im Definitionsbereich stetig, s. [VL 7.1](#). Insbesondere sind Polynome und rationale Funktionen (bis auf die Polstellen - die gehören nicht zum Definitionsbereich) stetig.

Das Paradebeispiel für eine unstetige Funktion ist die Heaviside- bzw. Sprungfunktion

$$s(t) = \underline{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Sie ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.