Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

# Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

## 7. Woche – Polynome: Horner - Schema, Interpolation, Exponential- und Logarithmus-Funktionen

### Polynome: Horner - Schema

**A1** Machen Sie sich klar, dass mit dem Horner-Schema tatsächlich der Funktionswert eines Polynoms an der Stelle $x_0$ berechnet wird, vgl. Bsp. 3.7 in VL 3_2.

**A2** Führen Sie die Polynomdivision aus Bsp. 3.20 (Fortsetzung) VL 3_3 mittels zweier Polynomdivisionen durch einen Linearfaktor (einmal durch $(x-1)$ und dann durch $(x+2)$) mit Horner-Schema aus.

**A3** **Zusatz:** Machen Sie sich klar, warum das Berechnen eines Funktionswertes eines Polynoms an der Stelle $x_0$ mit dem Horner-Schema genau die Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x-x_0)$ realisiert, indem Sie

(a) den Zusammenhang zwischen den Polymonkoeffizienten $a_i$, $i = 0, \dots n$ und den Koeffizienten des 'Ergebnispolynoms' $b_i$, $i = 1, \dots n$ aus dem Horner-Schema ablesen: $b_i = \dots$

(b) sowie aus der Gleichung in Bem. 3.10 VL 5_2

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x) + b_0 \quad \text{mit } P_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + \dots b_2 x + b_1$$

durch **Vergleich der Koeffizienten** vor $x^i$ der linken und rechten Seite einen Zusammenhang zwischen $a_i$ (Koeffizienten von $P_n(x)$)und $b_i$ (Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$) feststellen: $a_i = \dots$

(c) sich überzeugen, dass die Ergebnisse von (a) und (b) zueinander equivalent sind.

**Beispiel:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $2$ | $4$ | $-4$ | $-8$ | $2$ | $4$ | | |
| $x_0 = 1$ | | $2$ | $6$ | $2$ | $-6$ | $-4$ | | |
| | $2$ | $6$ | $2$ | $-6$ | $-4$ | $\boxed{0}$ | $= P_5(1)$ | $\Rightarrow P_5(x) = (x-1)(2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 6x - 4)$ |
| allgemein | $a_n$ | $\dots$ | $\dots$ | $a_i$ | $\dots$ | $a_0$ | | |
| $x_0$ | | $x_0 b_n$ | $\dots$ | $x_0 b_{i+1}$ | $\dots$ | $x_0 b_1$ | | |
| | $b_n$ | $\dots$ | $b_{i+1}$ | $b_i$ | $b_1$ | $\boxed{0}$ | $= P_n(x_0)$ | $\Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1)$ |
| bzw. | $a_n$ | $\dots$ | $\dots$ | $a_i$ | $\dots$ | $a_0$ | | |
| $x_0$ | | $x_0 b_n$ | $\dots$ | $x_0 b_{i+1}$ | $\dots$ | $x_0 b_1$ | | |
| | $b_n$ | $\dots$ | $b_{i+1}$ | $b_i$ | $b_1$ | $b_0$ | $= P_n(x_0)$ | $\Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1) + b_0$ |

### Polynom-Interpolation

**A4** Ist $P(x) = x^2 - 2$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -2 & -1 & 2 \end{array}$ ?

### Exponential- und Logarithmus-Funktionen

**A5** Sind Ihnen die folgenden Potenzgesetze klar

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^2 = a^{2x} \text{ bzw. } (a^x)^n = a^{nx} \text{ sowie } a^{1/2} = \sqrt{a} \text{ ?}$$

Illustrieren Sie sich die Gesetze mit kleinen Beispielen, z.B. $2^{3+4} = \dots$

**A6** Geben Sie die Logarithmen in der Tabelle an.

| | $\log_{10}(10)$ | $\log_{10}(1)$ | $\log_{10}(100)$ | $\log_{100}(10)$ | $\log_{10}(0.1)$ | $\log_{10}(\sqrt{1000})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $=$ | | | | | | |
| $=$ | $\log_2(?)$ | $\log_2(?)$ | $\log_2(?)$ | $\log_?(2)$ | $\log_2(?)$ | $\log_2(?)$ |

Wählen Sie nun die Werte für die '?' in der dritten Zeile so, dass die Logarithmen die gleichen Werte (wie die aus Zeile 1 der Tabelle) annehmen.

**A7** Verinnerlichen Sie die (z.B. in der Informationstheorie) immer wieder gebrauchten Logarithmusgesetze aus VL 3_5:

$$\forall x, y, a > 0\colon\ \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

sowie die Folgerung

$$\log_a(x^2) = 2\log_a(x) \text{ bzw. } \log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

mittels kleiner Beispiele, z.B. $\log_2(2^3 \cdot 2^4) = \ldots$