

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

5. Woche – Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung, Polynome, Nullstellen

Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung

A1 Stellen Sie eine Gleichungen für

- (a) eine 'nach oben bzw. nach unten geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (b) eine 'nach links bzw. nach rechts geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (c) für alle Fälle in (a,b) mit dem Scheitel in $S(1, 2)$ auf.

Lösung:

- (a) $y = \pm x^2$,
- (b) $x = \pm y^2$,
- (c) $y - 2 = \pm(x - 1)^2$ bzw. $x - 1 = \pm(y - 2)^2$.

A2 Stellen Sie die Gleichungen für folgenden Kreis auf: Mittelpunkt $M(3, 5)$, Radius $r = 8$.

Lösung: Kreisgleichung allg.: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r .
hier speziell: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64$

In der komplexen Ebene würde man diesen Kreis durch $|z - (3 + i5)| = 8$ beschreiben.

A3 Bestimmen Sie Art und Lage der folgenden Kegelschnitte (Kreise, Parabeln, ...).

Hinweis: überführen Sie dazu mittels "quadratischer Ergänzung" die Gleichungen in ihre jeweilige Grundform.

- a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$ b) $y^2 - 6y = -x + 3$

Lösung: Allgemein bedeutet quadratische Ergänzung: $x^2 + ax = \underbrace{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}_{(x + \frac{a}{2})^2} - \frac{a^2}{4}$

- (a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$
 $\rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 2 = 4$
 $\rightarrow \boxed{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 6}$ Kreis mit $M(-1, -1)$ und $r = \sqrt{6}$
- (b) $y^2 - 6y = -x + 3$
 $\rightarrow y^2 - 6y + 9 - 9 = (y - 3)^2 - 9 = -x + 3$
 $\rightarrow \boxed{(y - 3)^2 = -x + 12}$ Parabel mit $S(12, 3)$, links ge"öffnet.

A4 Zusatz: Stellen Sie die Gleichungen aller Kreise auf, die die Koordinatenachsen berühren und durch den Punkt $P(1,2)$ gehen. Geben Sie die zugehörigen Mittelpunkte und Radien an.

Lösung: Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r . Die Berührungspunkte sind offenbar: $B_1(0, y_0)$ und $B_2(x_0, 0)$; $M(x_0, y_0)$ liegt im 1. Quadranten.

Einsetzen von $P(1,2)$: $(1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = r^2$.

Einsetzen von B_1 : $x_0^2 = r^2$.

Einsetzen von B_2 : $y_0^2 = r^2$.

da $x_0 \geq 0$ und $y_0 \geq 0 \rightarrow x_0 = y_0 = r$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert: $(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$ (*)

Also $r^2 - 6r + 5 = 0 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = 5$.

Es erfüllen genau zwei Kreise die obigen Bedingungen, und zwar

K_1 mit Mittelpunkt $M(1,1)$ und Radius $r = 1$: $K_1 = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

K_2 mit Mittelpunkt $M(5,5)$ und Radius $r = 5$: $K_2 = \{(x, y) \mid (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25\}$.

Bemerkung: Gleichung (*) kann man auch direkt aus einer geometrischen Lagebetrachtung und dem Satz des Pythagoras schlussfolgern.

Polynome, Nullstellen

A5 (a) Geben Sie ein Polynom mit den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.

(b) Geben Sie ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** und den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.

Lösung: a) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, b) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$

A6 Gegeben ist ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl reeller und die Anzahl komplexer Nullstellen an.

A7 Zusatz: Beweisen Sie [Bem. 2.24 3\)](#) in VL 2.5:

Ist z nichtreelle Nullstelle des reellen Polynoms $P(z)$, so ist $\bar{z}$ ebenfalls eine Nullstelle.
bzw.

Nullstellen treten in Polynomen mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

Zeigen Sie zu diesem Zweck zunächst: $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$ und somit, dass $a_n(\bar{z})^n = \overline{(a_n z^n)}$.
Was folgt daraus für $P(\bar{z})$? ($P(z) = ?!$)

Lösung:

Beweis: Wegen $\overline{\overline{ab}} = ab$, ggf. nachrechnen: $(x_a - iy_a)(x_b - iy_b) = \overline{(x_a + iy_a)(x_b + iy_b)}$
folgt $(\bar{z})^2 = \overline{(z^2)}$ und

per vollständiger Induktion $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)

Laut Voraussetzung ist $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$, da z **Nullstelle**.
 Folglich ist

$$\begin{aligned}
 P(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k} && \text{wegen (1)} \\
 &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} && \text{wegen } a_k \in \mathbb{R} \\
 &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} && \text{wegen } \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{a + b} \\
 &= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 && \text{da } z \text{ Nullstelle}
 \end{aligned}$$

Also ist $P(\bar{z}) = 0$ und somit $\bar{z}$ Nullstelle.

q.e.d.