Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einer Lösung)
4. Woche – komplexe Zahlen / Widerstände

Die Aufgaben wurden aus dem Aufgabenheft zur VL Dynamische Netzwerke adaptiert. Während in der Ma1-Klausur **ohne** Taschenrechner gearbeitet wird, kann es bei diesen Aufgaben naheliegend sein, einen Taschenrechner zu benutzen.

1. Geben Sie den Real- und den Imaginärteil, den Betrag und den Phasenwinkel (= Argument) der folgenden komplexen Widerstände an:

   a) $\underline{Z} = 10\,\Omega + \mathrm{i}\,5\,\Omega$ b) $\underline{Z} = 50\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{k}\Omega$

   c) $\underline{Z} = 5\,\Omega - \mathrm{i}\,10\,\Omega$ d) $\underline{Z} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{M}\Omega$

   Lösung: Es kommt eher auf den Weg als auf die Ergebniszahlen an.
   a) $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = 10\,\Omega,\ \mathrm{Im}(\underline{Z}) = 5\,\Omega, |\underline{Z}| = 11,18\,\Omega, \varphi = \arg(\underline{Z}) = 26,56°$.
   Man beachte die unterschiedliche **Notation Ma vs. ET3**:
   Ma: komplexe Zahl z, Betrag $|z|$, **ET**: komplexe Zahl $\underline{Z}$, Betrag Z.

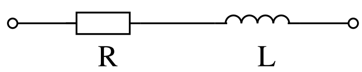
2. Gegeben sind folgende komplexe Widerstände:
   $\underline{Z}_1 = 30\,\Omega,\quad \underline{Z}_2 = \mathrm{i}\,10\,\Omega,\quad \underline{Z}_3 = 30\,\Omega + \mathrm{i}\,10\,\Omega,\quad \underline{Z}_4 = 30\,\Omega - \mathrm{i}\,10\,\Omega.$

   (a) Zeichnen Sie die komplexen Widerstände $\underline{Z}_1$ bis $\underline{Z}_4$ maßstäblich in eine komplexe Ebene ein.

   (b) Bestimmen Sie rechnerisch die Beträge und die Phasenwinkel und stellen Sie die $\underline{Z}_\nu$ in der Form $\underline{Z}_\nu = Z_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, grafisch dar. Überprüfen Sie die Ergebnisse von a).

   Lösung: Es kommt eher auf den Weg als auf die Ergebniszahlen an.
   b) $\underline{Z}_2 = \mathrm{i}\,10\,\Omega, |\underline{Z}_2| = 10\,\Omega, \varphi_2 = 90°$.

3. Gegeben ist eine technische Spule mit den angegebenen Daten:



   (a) Wie groß ist ihr komplexer Gesamtwiderstand (s. VL 2_2)?
   ($\omega = 2\pi f = 2\pi 50\,\mathrm{Hz},\ 1\,\mathrm{H} = \frac{1\,\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$)

   (b) Stellen Sie den komplexen Gesamtwiderstand für $\omega = 0 \ldots \infty$ in der komplexen Ebene dar.

   Lösung

(a) $\underline{Z}_{\text{gesamt}} = R + \mathrm{i}\,\omega L = 30\,\Omega + \mathrm{i}\,30\pi\,\Omega$.

(b) Eine Halbgerade bei $\mathrm{Re} = 30\,\Omega$ und $\mathrm{Im} = 0 \ldots \infty$.

4. Veranschaulichen Sie sich in der komplexen Zahlenebene den Begriff des sogenannten rotierenden Zeigers (wird im Fach Dynamische Netzwerke, 3. Semester verwendet):

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ für $t = 0, \frac{T}{8}, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
(T ist die Periodendauer, $f = \frac{1}{T}$ die Frequenz und ω die sogenannte Kreisfrequenz).
Stellen Sie Real- und Imaginärteil $\mathrm{Re}(z(t)), \mathrm{Im}(z(t))$ für $t \in [0, 2T]$ dar.