

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 2. Woche – Logik, Quantoren, Beweise

Logik

- A1** Überprüfen Sie die Regel $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, [F 1.2](#), mit der Wahrheitstafel.
- A2** Beweisen Sie durch elementare Umformungen die sogenannte Kontraposition (bzw. den Umkehrschluss), s. auch Beweisprinzipien [VL 1.3 S. 2](#).

$$p \Rightarrow q = \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$$

Lösung: $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q = \bar{p} \vee \bar{\bar{q}} = \bar{\bar{q}} \vee \bar{p} = \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

- A3** Welche der stets wahren Implikationen aus Aufgabe 1.5 a,b,c ist ein Paradebeispiel für 'aus Falschem folgt Beliebiges', s. [VL 1.2 S. 2](#)? **Lösung:** 1.5. c .
- A4** Wie viele verschiedene zweistellige Aussageformen $F(p, q)$ gibt es (d.h. wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Wahrheitstabelle zu füllen)? **Lösung:** $2^4 = 16$.
- A5** Stellen Sie (mit gesundem Menschenverstand) je eine Wahrheitstafel für die Aussagen 'p ist hinreichend für q' und für 'q ist notwendig für p' auf!
Hinweis: Aussageform-'Denke': 'p ist hinreichend für q' = $F(p, q)$ kann für verschiedene Belegungen von p und q verschiedene Werte annehmen. Sie sollen diese Werte in der Wahrheitstafel zusammentragen.
Vergleichen Sie anschließend mit der Wahrheitstafel von $p \Rightarrow q$.

Gedanken zur Lösung: Bedeutung 'hinreichend' und 'notwendig':

$$\text{'a ist hinreichend für b'} = (a \Rightarrow b)$$

$$\text{'b ist notwendig für a'} = (\bar{b} \Rightarrow \bar{a}) = (a \Rightarrow b) \quad \text{Kontraposition}$$

- A6** [Zusatz] In digitalen Schaltungen sind sogenannte [NAND-Gatter](#) ($\overline{p \wedge q}$ - Schaltungen) Basisbausteine. Denken Sie sich je eine Schaltung aus (Kopplung von) NAND-Gattern zur Realisierung einer Negation, \bar{p} , und einer Disjunktion, $p \vee q$, aus.

Lösung: $\bar{p} = \overline{p \wedge \bar{p}}$ (*) bzw. $p \vee q = \overline{\overline{p \vee q}} = \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}} \stackrel{(*)}{=} \overline{\bar{p} \wedge \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{q}}$

Beweise

A7 Beweisen Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel (zweier Zahlen)

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

einmal direkt und einmal indirekt. **Lösung:** s. Extrablatt.