Technische Universität Dresden
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL B202, HA 42378)

Bitte vermeiden – häufige Fehlerquellen

Bruchrechnung

Kaum zu glauben, aber die häufigsten Fehler passieren den Studenten beim Rechnen mit Brüchen. Erinnern Sie sich daher an die Rechenregeln für Brüche:
Es seien p, q, r, s ganze Zahlen mit $q, s \neq 0$. Dann gelten

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}, \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s - q \cdot r}{q \cdot s}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}, \quad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$$

wobei für die letzte Beziehung noch $r \neq 0$ vorausgesetzt werden muss.

Kürzen: Brüche sollten immer gekürzt werden. Dabei werden gemeinsame Faktoren herausgestrichen. Insbesondere nach Anwendung der obigen Rechenregeln können neue gemeinsame Faktoren im Ergebnis auftreten, die gekürzt werden können.

Falsche Regeln

Multiplizieren wir	$(2+3)$	oder allgemein	$(x+y)$
mit dem Faktor	7	oder allgemein	a,
so gilt	$7(2+3) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 14 + 21 = 35$	oder allgemein	$a(x+y) = ax + ay$.

Abstrakt gesprochen gilt mit $f(x) = ax$ die Formel

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Eine Formel dieser Art gilt **nur für lineare Funktionen** wie obige. Eine weitere lineare Funktion, die Sie im Studium kennenlernen ist die Matrix-Vektor-Multiplikationen. **Sonst gilt diese Formel nicht!** Leider wird sie aber oft von Studenten falsch genutzt...
Auch die Potenzgesetze werden häufig falsch angewandt. Es gilt unter anderem

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{und} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Mit der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gilt damit

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{und} \quad f(x-y) = f(x)/f(y).$$

Auch diese Formel gilt **nur für Exponentialfunktionen**.
Eng verwandt damit sind Logarithmengesetze. Dazu gehören

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy), \quad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{und} \quad \log_a(x^b) = b \log_a(x).$$

Bezeichnen wir die allgemeine Logarithmusfunktion mit $f(x) = \log_a(x)$, so gilt damit

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

Wie zuvor gilt eine solche Gesetzmäßigkeit **nur für Logarithmusfunktionen**.

Fallunterscheidungen

Bei Umformungen von Gleichungen oder Ungleichungen muss jeder Schritt durchführbar sein. Insbesondere das Auflösen von Potenzen, Beträgen oder Produkten führt dabei häufig zu Fallunterscheidungen.

Beträge: Ein Beispiel dafür ist: Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| = 2$. Der Betrag selbst ist eine stückweise definierte Funktion. Daher ist es fast immer sinnvoll, Gleichungen oder Ungleichungen mit Beträgen mit Hilfe von Fallunterscheidungen aufzulösen.

Für obiges Beispiel wäre dies:

Fall 1) $x-1 \geq 0$, also $x \geq 1$. Dann gilt $\quad |x-1| = x-1 \stackrel{!}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$ Wir haben hier mit "$\stackrel{!}{=}$" eine weitere Notation genutzt. Diese soll ausdrücken, dass nach den bereits durchgeführten Umformungen nun die Bedingung des ursprünglichen Ausdrucks folgt.

Da $x = 3 \geq 1$ gilt, also die Voraussetzungen des ersten Falls erfüllt sind, ist dies eine Lösung.

Fall 2) $x-1 < 0$, also $x < 1$. Dann gilt $\quad |x-1| = -(x-1) = 1-x \stackrel{!}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$ Da $x = -1 < 1$ gilt, ist auch dies eine Lösung.

Potenzen: Haben wir zum Beispiel die Gleichung $(x+2)^2 = x^2$, so ergibt das Wurzelziehen $|x+2| = |x|$. Dies ist nun eine Betragsgleichung (wie oben), so dass wir die Fälle $x < -2$, $-2 \leq x < 0$ und $x > 0$ separat untersuchen müssen.

Fall 1) $x < -2$ und damit $\quad |x+2| = -(x+2) = |x| = -x \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 0,\quad$ was ein Widerspruch ist. Somit gibt es in dem Fall keine Lösung.

Fall 2) $-2 \leq x < 0$ und damit $\quad |x+2| = x+2 = |x| = -x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$ Dies liegt im Intervall $[-2, 0)$ und ist somit eine Lösung.

Fall 3) $x \geq 0$ und damit $\quad |x+2| = x+2 = |x| = x \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0,\quad$ was erneut ein Widerspruch ist.

Es gibt also genau eine Lösung $x = -1$. (Hier wäre ein deutlich einfacherer Weg das Ausmultiplizieren der linken Seite mit anschließender Umstellung nach x.)

Produkte: Eine typische Aufgabe ist: Gesucht sind die Nullstellen von

$$f(x) = (x+2)(2x-3)(x^2-3x+1)(x^2-4).$$

Hier sollten wir **auf keinen Fall ausmultiplizieren**. Damit $f(x)$ Null wird, muss mindestens einer der Faktoren Null sein. Wir kommen also deutlich schneller zum Ziel, wenn wir die Faktoren getrennt voneinander betrachten, als wenn wir alles ausmultiplizieren und ein Polynom sechsten Grades haben. Für dieses gibt es obendrein auch keine allgemeine Lösungsformel mehr. Fangen wir also an mit den Faktoren.

$$\begin{aligned}
x+2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2, \\
2x-3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2}, \\
x^2-3x+1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \\
x^2-4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{5,6} = \pm 2.
\end{aligned}$$

Somit haben wir fünf verschiedene Nullstellen gefunden, wovon eine doppelt ist.
Manchmal müssen wir auch eine Gleichung durch einen Ausdruck dividieren, der Null sein könnte. Auch hier müssen wir Fälle unterscheiden. Gesucht sind zum Beispiel alle Lösungen der Gleichung

$$(x+3)\sin(x) = \sin(x).$$

Offensichtlich ist $\sin(x)$ ein Faktor, der auf beiden Seiten steht. Führen wir also eine Fallunterscheidung mit $\sin(x) = 0$ durch:
Fall 1) Es sei $\sin(x) = 0$, das heißt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Gleichung mit $0 = 0$.
Fall 2) Es sei $\sin(x) \neq 0$. Dann folgt nach Division durch $\sin(x)$

$$x + 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Damit haben wir alle Lösungen gefunden.

Schreibweise

Nicht zuletzt liegt eine häufige Fehlerquelle in der Darstellung der eigenen Rechenschritte. Hierzu sollten ein paar einfache Hinweise befolgt werden.

- Alle Schritte sollten in einer **systematischen** Weise aufgeschrieben werden. Viele Aufgaben lassen sich nach dem immer gleichen Schema lösen, welches in Vorlesungen und Übungen trainiert wird. Nichts liegt näher, als diesen Schemata zu folgen. Dies hat den Vorteil, dass keine Schritte ausgelassen werden und die Nachvollziehbarkeit der Schritte gegeben ist.

- Beim Aufschreiben der Schritte sollte die **Notation** einheitlich genutzt werden. Natürlich können wir neue Symbole, Variablen und Bezeichnungen einführen. Aber dies müssen wir notieren und darüber nachdenken, ob nicht die schon bekannte Notation anwendbar ist und wir vielleicht eine doppelte Notation eingeführt haben.

- Für viele Rechnungen ist es hilfreich, mit **Klammern** zu arbeiten. Diese können in späteren Schritten aufgelöst werden, aber erst einmal haben wir damit die richtigen Terme hingeschrieben.

- Bei den meisten Rechnungen kann eine einfache **Probe** durch Einsetzen der gefundenen Lösung in die Ursprungsaufgabe gemacht werden. Dies kostet nicht viel, kann aber auf Fehler hinweisen.

- Als letzter Punkt sollte noch die **Sauberkeit** der Schrift aufgeführt werden. Es ist extrem ärgerlich, wenn alle Schritte der Lösung richtig durchgeführt werden, aber die eigene Handschrift nicht gelesen werden konnte und damit falsch weiter gerechnet wird. Konsequenz solcher Fehler ist es oft, dass die nächsten Schritte viel schwieriger oder vielleicht auch nicht mehr durchführbar werden.